Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2017

Marta Isabel Cunha da Rocha

Recursos Digitais para diagnóstico e avaliação do tema Circunferência no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2017

Marta Isabel Cunha da Rocha

Recursos Digitais para diagnóstico e avaliação do tema Circunferência no 3.º Ciclo do Ensino Básico

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para professores, realizada sob a orientação científica do Doutor Luís Descalço, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e da Doutora Paula Oliveira, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president	Prof. Doutora Maria Paula Lopes dos Reis Carvalho Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	Prof. Doutora Maria Teresa Mesquita Cunha Machado Malheiro Professora Auxiliar da Escola de Ciências da Universidade do Minho
	Prof. Doutor Luís António Arsénio Descalço Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos / acknowledgements

Ao longo deste último ano, muitas foram as pessoas que, direta ou indiretamente me ajudaram a conseguir alcançar o meu objetivo de concluir este projeto, que culmina nesta dissertação. A todos expresso aqui a minha sincera gratidão.

Ao meu orientador, Professor Doutor Luís Descalço agradeço a orientação, disponibilidade, acompanhamento, paciência e partilha do saber. Obrigada pela oportunidade e privilégio de poder aprender e enriquecer os meus conhecimentos com o seu saber. O seu apoio foi determinante para a elaboração desta tese.

À Professora Doutora Paula Oliveira agradeço a partilha de conhecimentos e a oportunidade de poder aprender com a sua experiência e dedicação.

À minha amiga e colega de mestrado Diana Ramalho, agradeço a amizade, o carinho, a ajuda e o incentivo nas horas difíceis. Muito obrigada por seres minha amiga.

Ao programador do PmatE, Jorge Mariño e à colega Sandra Ramos, responsável pelo desenvolvimento de conteúdos no PmatE, muito obrigada por toda a ajuda, paciência e disponibilidade que sempre demonstraram. Obrigada também pela vossa simpatia.

À Direção, colegas e auxiliares do Agrupamento de Escolas de Lousada, mais concretamente, da Escola Básica de Lousada Centro agradeço por toda a ajuda e disponibilidade na concretização deste projeto.

Aos meus alunos da turma B do 9.º ano (2016/2017), muito obrigada pela vossa participação e empenho na execução deste trabalho. Sem vocês não teria sido possível a conclusão desta tese. Agradeço também aos Encarregados de Educação que consentiram a participação dos seus educandos neste projeto.

Ao meu marido, Hélder Santos, que esteve sempre a meu lado, pelo amor, apoio e confiança. Obrigada por teres tanta paciência comigo.

Aos meus filhos, Leonor e Guilherme, obrigada pelo vosso amor incondicional.

Aos meus pais, aos meus irmãos, agradeço todo o amor, apoio e ajuda em todo este processo e por estarem sempre presentes na minha vida.

À minha família, agradeço todo o carinho e incentivo ao longo deste ano.

A todos os que, de uma forma ou outra, contribuíram para a concretização deste objetivo, os meus mais sinceros agradecimentos.

Palavras Chave Gamificação, recursos digitais, ensino, matemática, circunferência, ângulos, arcos, questões de escolha múltipla, exercícios parametrizados

Resumo

O Ensino tem vindo a sofrer muitas alterações ao longo dos últimos anos. Desde os programas das disciplinas às práticas letivas, muitas têm sido as modificações que a Escola tem suportado.

Uma das principais razões para estas mudanças está relacionada com o crescente insucesso dos alunos. A falta de motivação e de interesse dos discentes pela aprendizagem tem condicionado muito a obtenção de sucesso às diversas disciplinas.

No sentido de melhorar os resultados escolares, os professores têm, ao longo dos anos, vindo a alterar as suas práticas letivas, adequando-as aos interesses, convicções e objetivos dos alunos.

Por este motivo, a gamificação da educação tem vindo a ganhar cada vez mais adeptos. A utilização de jogos em contexto de sala de aula tem sido uma das ferramentas utilizadas no combate ao insucesso escolar.

O presente trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de recursos digitais sobre o tema *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência*, os quais foram desenvolvidos na plataforma *ModelMaker* do Projeto Matemática Ensino (PmatE) da Universidade de Aveiro. Estes recursos poderão ser utilizados por professores e alunos como uma ferramenta de diagnóstico, consolidação e avaliação das aprendizagens, bem como, podem ser usados como um instrumento de motivação para o combate ao insucesso escolar, nomeadamente, da disciplina de Matemática.

Ao longo do ano letivo 2016/2017, fui construindo provas com os recursos disponibilizados na plataforma de ensino assistido PmatE, as quais foram resolvidas pelos alunos como complemento aos exercícios do manual.

Keywords

Gamification, digital resources, education, mathematics, circle, angle, arch, multiple choice questions, parameterized exercises

Abstract

Teaching has undergone many changes over the last few years. Many modifications have been supported by the School, from disciplinary programs to teaching practices.
One of the main reasons for these changes is related to the increase of students' school failure.
The students' lack of motivation and interest in learning has interfered on success achievement in different disciplines.
In order to improve school results, teachers have been changing their teaching practices, over the last years, adapting them to the interests, convictions and goals of the students.
The main purpose of this project is the development of digital resources on the *properties of angles, chord and arcs defined on a circle*, which were developed in the *ModelMaker* platform of the Mathematical Teaching Project (PmatE) of the University of Aveiro. These resources can be used by teachers and students as a tool for the diagnosis, consolidation and evaluation of learning, as well as be used, as a motivational tool to fight against school failure, particularly in Mathematics.
Throughout the school year 2016/2017, I've created tests using the resources available on the assisted teaching platform - PmatE, which were answered by the students as a complement of the exercises available on the school manual.

Conteúdo

Conteúdo . . . i

Lista de Figuras . . . iii

Lista de Tabelas . . . vii

1 Introdução . . . 1

2 Gamificação na Educação Matemática: Motivação e Diagnóstico . . . 3

3 Recursos digitais desenvolvidos – Questões parametrizadas na matemática . . . 6
- 3.1 Enquadramento no Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico . . . 6
- 3.2 Enquadramento teórico . . . 11
- 3.3 As dificuldades mais frequentes relativas às propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência . . . 32
- 3.4 Recursos digitais desenvolvidos . . . 32

4 Utilização de uma Plataforma de Ensino Assistido no ensino da matemática no 3.º ciclo . . . 39

5 Análise dos resultados . . . 42
- 5.1 Caracterização do Agrupamento de Escolas . . . 42
- 5.2 Caracterização da turma . . . 43
- 5.3 Trabalho desenvolvido . . . 44

6 Conclusão e trabalho futuro . . . 46

Referências . . . 48

Anexos . . . 50

Lista de Figuras

3.1 Circunferência 12
3.2 Círculo 12
3.3 Elementos de uma circunferência 12
3.4 Posição relativa de uma reta e uma circunferência 13
3.5 Propriedade da reta tangente 14
3.6 Ângulo 14
3.7 Ângulo ao centro 15
3.8 Transferidor 180º 15
3.9 Transferidor 360º 15
3.10 Medição de um ângulo usando um transferidor 16
3.11 Propriedades geométricas em circunferências 16
3.12 Propriedades geométricas em circunferências 17
3.13 Reta perpendicular a uma corda 18
3.14 Arcos e cordas compreendidos entre retas paralelas 19
3.15 Arcos e cordas 19
3.16 Ângulo inscrito 20
3.17 Ângulo inscrito 21
3.18 Ângulo inscrito 22
3.19 Ângulo inscrito 22
3.20 Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência 23
3.21 Ângulo inscrito numa semicircunferência 24
3.22 Segmento de círculo 24
3.23 Ângulo de um segmento 25
3.24 Ângulo de um segmento agudo 26
3.25 Ângulo de segmento reto 27
3.26 Ângulo de um segmento obtuso 27
3.27 Ângulo ex-inscrito 28
3.28 Ângulo com vértice no interior da circunferência 29
3.29 Ângulo com vértice no interior da circunferência 29
3.30 Ângulo com vértice no exterior da circunferência 30
3.31 Ângulo com vértice no exterior da circunferência 31
3.32 Catalogação dos exercícios 33
3.33 Enunciado 33
3.34 Resposta 1 34
3.35 Validação da resposta 1 34
3.36 Resposta 2 35

3.37 Validação da resposta 2 35
3.38 Resposta 3 35
3.39 Validação da resposta 3 36
3.40 Resposta 4 36
3.41 Validação da resposta 4 36
3.42 Concretização 1 37
3.43 Concrtização 2 37
3.44 Concretização 3 38
3.45 Concretização 4 38

5.1 Número dos alunos 43
5.2 Idade dos alunos 43
5.3 Níveis 44
5.4 Quero estudar até 44

A.1 Enunciado 50
A.2 Resposta 1 51
A.3 Validação da resposta 1 51
A.4 Resposta 2 51
A.5 Validação da resposta 2 52
A.6 Resposta 3 52
A.7 Validação da resposta 3 52
A.8 Resposta 4 53
A.9 Validação da resposta 4 53
A.10 Concretização 54
A.11 Concretização 54
A.12 Concretização 55
A.13 Concretização 55
A.14 Enunciado 56
A.15 Resposta 1 56
A.16 Validação da resposta 1 56
A.17 Resposta 2 57
A.18 Validação da resposta 2 57
A.19 Resposta 3 58
A.20 Validação da resposta 3 58
A.21 Resposta 4 59
A.22 Validação da resposta 4 59
A.23 Concretização 60
A.24 Concretização 60
A.25 Concretização 61
A.26 Enunciado 61
A.27 Resposta 1 62
A.28 Validação da resposta 1 62
A.29 Resposta 2 63
A.30 Validação da resposta 2 63
A.31 Resposta 3 64
A.32 Validação da resposta 3 64
A.33 Resposta 4 65
A.34 Validação da resposta 4 65
A.35 Concretização 66

A.36 Concretização 66
A.37 Concretização 67

Lista de Tabelas

5.1 Informação das provas realizadas 45

CAPÍTULO 1

Introdução

A Matemática é, desde sempre, considerada a disciplina mais difícil pela maioria dos alunos. O estigma demarcado pela sociedade e incutido em muitos discentes são alguns dos problemas que levam aos maus resultados dos alunos nesta disciplina. Frases do tipo "Eu já não era bom a matemática, logo o meu filho também não é" ou "Eu nunca gostei de Matemática, por isso o meu filho também não gosta", são muito usuais nas reuniões com os Encarregados de Educação, que quando interpelados para ajudar a melhorar os níveis dos seus educandos, nos respondem desta maneira.

Na tentativa de combater o insucesso da Matemática, bem como de batalhar contra o pessimismo que rodeia esta disciplina, os professores têm vindo a alterar as suas práticas letivas, implementando novas estratégias de ensino que motivem os alunos para a aprendizagem. E, neste sentido, têm surgido ferramentas de ensino cujo objetivo é ajudar a alcançar o tão desejado sucesso escolar.

O PmatE é disso exemplo. Esta plataforma de ensino assistido foi criada pela Universidade de Aveiro, com o objetivo primordial de combater o insucesso na disciplina de Matemática, fomentando o gosto e a motivação para esta área. A natureza desta plataforma permite a realização de provas de treino ou de avaliação diagnóstica, formativa ou sumativa, com correção automática e conhecimento imediato dos resultados obtidos, quer por conteúdos quer por subdomínios. Esta interação permite aos alunos e professores diagnosticar dificuldades, permitindo melhorar as aprendizagens.

O meu projeto teve como objetivo, para além do desenvolvimento de recursos digitais, utilizar o PmatE como uma ferramenta para motivar os alunos para a Matemática, tentando mostrar-lhes que se pode aprender Matemática de uma forma mais lúdica. No entanto, expliquei-lhes também que este método de aprendizagem é um complemento às aulas e aos manuais.

Para a realização deste trabalho decidimos escolher os meus alunos da turma B do 9.º ano da Escola Básica de Lousada Centro. Neste sentido, escolhi, de entre os diversos subdomínios lecionados no 9.º ano, o subdomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos* *definidos numa circunferência*, visto que os alunos demonstram algumas dificuldades neste tema, nomeadamente na interligação de conceitos.

O projeto foi dividido em duas fases: a primeira de familiarização com o programa e realização de diversas provas ao longo do ano letivo; e a segunda de construção de modelos parametrizados (geradores de questões sobre o tema) sobre o subdomínio escolhido.

Muitos foram os entraves à realização deste projeto. Desde a falta de meios na escola para a implementação do projeto em contexto de sala de aula, à falta de empenho de alguns alunos na realização das provas, passando pelo meu completo desconhecimento sobre a utilização da plataforma *ModelMaker*, sobre *LaTeX* ou sobre código *Python*.

No entanto, os desafios foram superados com muita pesquisa e ajuda, nomeadamente do meu orientador Professor Doutor Luís Descalço, a coorientadora Professora Doutora Paula Oliveira, o programador do PmatE, Jorge Mariño e da colega Sandra Ramos, responsável pelo desenvolvimento de conteúdos no PmatE.

A dissertação está dividida em seis capítulos: Introdução; Gamificação na Educação Matemática: motivação e diagnóstico; Recursos digitais desenvolvidos; Utilização de uma plataforma de ensino assistido no ensino da Matemática; Análise dos resultados; e Conclusão.

No capítulo introdutório é feita uma breve apresentação do projeto e dos temas abordados.

No segundo capítulo é feita uma apresentação sobre a gamificação e a forma como esta técnica está a ser introduzida no ensino.

No capítulo seguinte, é feita uma apresentação das linhas gerais do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, nomeadamente das finalidades para o ensino da Matemática, dos objetivos que os alunos devem alcançar quando terminam o 3.º ciclo e das metas curriculares que devem atingir quer no domínio *Geometria*, quer no subdomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência.* São também referidas as principais dificuldades dos alunos no subdomínio escolhido, bem como explicado um dos recursos digitais desenvolvidos.

No quarto capítulo é feita uma referência à utilização de plataformas de ensino assistido no ensino da Matemática no 3.º ciclo, nomeadamente da plataforma PmatE.

No capítulo cinco é explicado o trabalho realizado ao longo do ano letivo com os alunos.

Por último, no sexto capítulo, são feitas as conclusões do trabalho, no qual são descritos os constrangimentos do projeto bem como sugestões para trabalhos futuros.

Desta dissertação, fazem também parte a bibliografia e os anexos, dos quais constam os outros recursos digitais desenvolvidos no âmbito deste trabalho.

Capítulo 2

Gamificação na Educação Matemática: Motivação e Diagnóstico

Numa era, em que as tecnologias são uma parte integrante da nossa vida, e mais concretamente, da vida dos adolescentes, é necessário encontrar formas diversificadas de motivar e empenhar os alunos para a escola. Neste sentido surge a gamificação na educação.

E o que é a gamificação? Gamificação consiste *no uso de técnicas características de videojogos em situações do mundo real, aplicadas em variados campos de atividade, tais como a educação, saúde, política e desporto, com o objetivo de resolver problemas práticos ou consciencializar ou motivar um público específico para um determinado assunto; ludificação* [1].

A gamificação surge na educação como uma técnica para tentar diminuir o insucesso escolar, procurando promover nos alunos motivação e empenho na aprendizagem.

O insucesso está muitas vezes relacionado com a falta de interesse para a aprendizagem. A falta de perseverança por parte dos adolescentes tem vindo a aumentar, o que leva a que desistam perante as dificuldades com que se deparam ao longo do seu percurso educativo. A falta de empenho, de envolvimento e de motivação contribuem para o insucesso.

Existem três componentes essenciais para a motivação ([2]): a autonomia, pois um aluno sente-se mais entusiasmado se tiver controlo sobre a forma de adquirir conhecimentos; o reconhecimento social dentro de um grupo, bem como a própria realização pessoal; a competência, isto é, a capacidade de desempenhar tarefas, de alcançar objetivos e/ou metas.

Neste sentido, o uso de jogos na assimilação e aplicação dos conteúdos estudados pode ser uma mais-valia para a escola, visto que o ensino pode ser personalizado e adaptado à realidade de cada aluno/turma, explorando as potencialidades e/ou dificuldades de cada um de forma segmentada.

Os jogos permitem que a aula decorra num ambiente mais divertido e descontraído, no qual o medo de errar quase não existe, se podem tentar de novo. Os alunos tornam-se jogadores e são desafiados para uma competição entre pares, na qual têm de trabalhar para ganhar pontos, subir de nível, obter a melhor pontuação possível para obterem recompensas e receber e verificar o seu progresso em tempo real. ([3])

A possibilidade de utilizarem o seu próprio *smartphone*, *tablet* ou computador, também aumenta o interesse e a motivação dos discentes.

No entanto, para que se obtenham os resultados pretendidos da gamificação, é necessário que os jogos possuam determinados mecanismos que permitam a obtenção de sucesso.

As questões colocadas inicialmente não devem ser muito fáceis, pois os alunos podem sentir-se entediados, nem muito difíceis, pois pode provocar desistência e/ou desinteresse. O aumento da dificuldade deve ser gradual, à medida que sobem de nível ou cumprem determinadas metas ou missões.

Por cada objetivo alcançado, o discente deverá receber uma recompensa/prémio, com o intuito de ir aumentando a motivação do aluno para a conclusão de novas tarefas até alcançar a meta final pretendida.

O feedback constante dos sucessos alcançados é uma ferramenta muito importante na gamificação, pois permite que o aluno acompanhe a sua evolução e controle a sua aprendizagem, bem como implica uma maior autonomia por parte do discente.

Uma parte importante do uso desta ferramenta é a tabela de classificação, pois permite aos alunos verificarem o seu ranking frequentemente, permitindo uma maior competição entre os seus pares, na tentativa de melhorar cada vez mais participação de cada um, o que leva ao reconhecimento social, uma das componentes essenciais da motivação.

No caso específico da disciplina de Matemática, muitos são os jogos que vêm sendo utilizados como ferramentas para aumentar o gosto pela disciplina, nomeadamente, o PmatE (competições e respetivos treinos), o *Jogo do 24*, as *Olimpíadas de Matemática*, o *SuperTMatik*, *Centurium*, entre outros.

Mas, para que seja possível implementar a gamificação na educação, tem de existir uma mudança na Escola. Os programas das disciplinas não poderão ser tão extensos nem tão inflexíveis; o professor tem de possuir ferramentas necessárias para a construção e implementação de jogos na sala de aula; as escolas têm de estar dotadas de acessórios que permitam o uso dos diversos instrumentos que a gamificação implica, nomeadamente computadores, projetores e/ou internet.

Outro dos fatores a ter em consideração está relacionado com a motivação, extrínseca e intrínseca. A primeira tem origem em estímulos externos ([4]), isto é, o individuo faz determinada tarefa para receber recompensas ou para não ser punido ou castigado. Por outro lado, a motivação intrínseca tem origem em fatores internos, relacionando-se com a personalidade, os interesses e os gostos de cada indivíduo. Para este tipo de motivação, não é preciso existir recompensa, pois a tarefa por si própria já satisfaz o sujeito.

Todas as estratégias que tenham como objetivo aumentar o gosto e o sucesso pela aprendizagem necessitam de saber envolver os dois tipos de motivação referidos. A gamificação pode conduzir o aluno a desenvolver uma motivação extrínseca. Após o contacto com o tema, o discente pode desenvolver motivação intrínseca, descobrindo a beleza e o interesse pelo estudo, não apenas pelo jogo.

No entanto, por muitas diversificações de práticas letivas que sejam efetuadas, se um aluno não quiser aprender nada o vai motivar.

A gamificação por si só não vai mudar a escola, mas pode ajudar a modificar mentalidades.

CAPÍTULO 3

Recursos digitais desenvolvidos – Questões parametrizadas na matemática

3.1 Enquadramento no programa e metas curriculares do ensino básico

Ao longo dos anos, o currículo de Matemática do ensino básico e secundário tem sofrido algumas alterações. Estas têm-se focado quer a nível de conteúdos programáticos, quer a nível das competências que os alunos devem possuir quando terminam um ciclo de estudos.

A última alteração ao programa do ensino básico foi em 2013, ano em que para além da mudança da estrutura curricular, foram definidos os conhecimentos e as capacidades fundamentais que os discentes devem adquirir e desenvolver ao longo dos ciclos, bem como foram definidas as metas curriculares, cuja enumeração dos objetivos gerais através dos descritores, permite aos professores uma maior conciliação entre os desempenhos e as avaliações dos alunos.

No Novo Programa estão também definidas as principais finalidades para o Ensino da Matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. No documento oficial pode ler-se [5]:

1. ***A estruturação do pensamento*** – *A apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas,*

coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral.

2. ***A análise do mundo natural*** *– A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução. Em particular, o domínio de certos instrumentos matemáticos revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (Física, Química, Ciências da Terra e da Vida, Ciências Naturais, Geografia...).*

3. ***A interpretação da sociedade*** *– Ainda que a aplicabilidade da Matemática ao quotidiano dos alunos se concentre, em larga medida, em utilizações simples das quatro operações, da proporcionalidade e, esporadicamente, no cálculo de algumas medidas de grandezas (comprimento, área, volume, capacidade,...) associadas em geral a figuras geométricas elementares, o método matemático constitui-se como um instrumento de eleição para a análise e compreensão do funcionamento da sociedade. É indispensável ao estudo de diversas áreas da atividade humana, como sejam os mecanismos da economia global ou da evolução demográfica, os sistemas eleitorais que presidem à Democracia, ou mesmo campanhas de venda e promoção de produtos de consumo. O Ensino da Matemática contribui assim para o exercício de uma cidadania plena, informada e responsável.*

Outra das finalidades deste Novo Programa, e não menos importante que as anteriormente referidas, é o gosto pela Matemática e pela redescoberta das relações e dos factos matemáticos. Para tal, é necessário que os professores desenvolvam estratégias que promovam, cativem e incentivem os alunos para o estudo da Matemática, lutando contra os estereótipos sobre esta disciplina.

No mesmo documento, são também definidos por ciclo, os objetivos que os alunos devem alcançar para que consigam atingir as finalidades referidas. Para o 3.º ciclo, estão definidos os seguintes desempenhos ([5]):

1. *Identificar/designar: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.*

2. *Reconhecer: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.*

3. *Reconhecer, dado...: O aluno deve justificar o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.*

4. *Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.*

5. *Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.*

6. *Estender: Este verbo é utilizado em duas situações distintas:*

   a) *Para estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida. O aluno deve definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização.*
   b) *Para estender uma propriedade a um universo mais alargado. O aluno deve reconhecer a propriedade, podendo por vezes esse reconhecimento ser restrito a casos concretos.*

7. *Justificar: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.*

Para os autores do Novo Programa, os discentes devem possuir: conhecimento de factos e procedimentos, nomeadamente práticas rotineiras e memorização de conceitos, que permitem a elaboração de estratégias para a resolução de problemas e/ou exercícios; raciocínio matemático, para que consigam elaborar conjeturas através da análise de situações particulares, bem como demonstrar a veracidade de algumas conjeturas; comunicação matemática, pois os discentes deverão ser capazes de explicar quer oralmente, quer por escrito a interpretação de diferentes enunciados, expor o seu raciocínio, as suas estratégias e as suas conclusões, bem como comentar e discutir afirmações elaboradas nas aulas; capacidade de resolução de problemas, devendo ser capazes de interpretar corretamente os enunciados, estabelecer relações entre diversos conceitos estudados, demonstrando espírito crítico na análise do resultado final; entender a matemática como um todo coerente, estabelecendo conexões entre os diversos conteúdos e domínios apreendidos.

Com as recentes alterações introduzidas no Programa de Matemática, os conteúdos estão organizados por domínios e subdomínios. No 3.º ciclo, os domínios são cinco: Números e Operações (NO); Geometria e Medida (GM); Funções, Sequências e Sucessões (FSS); Álgebra (ALG); Organização e Tratamento de Dados (OTD).

Cada um dos domínios possui subdomínios, para os quais estão definidos objetivos por ano de escolaridade.

Quando fui questionada sobre qual o tema que gostaria de focar o meu estudo para este trabalho, escolhi o subdomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência*, do domínio *Geometria e Medida* referente ao 9.º ano de escolaridade, pois ao longo dos anos e sempre que lecionei este conteúdo, verifiquei que os alunos demonstraram muitas dificuldades na assimilação e aquisição de conhecimentos neste subdomínio. Na busca de estratégias de remediação, nomeadamente através da diversificação de atividades, que permitam cativar e incentivar os alunos para a Matemática, com o objetivo final que visa o melhoramento dos resultados à disciplina, propus-me à elaboração de materiais sobre o subdomínio referido.

No Novo Programa ([5]) os objetivos para o subdomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência* encaixam nos conceitos seguintes:

- *Arcos de circunferência; extremos de um arco; arco menor e maior;*
- *Cordas; arcos subtensos por uma corda; arco correspondente a uma corda; propriedades;*
- *Amplitude de um arco;*
- *Ângulo inscrito num arco; arco capaz; arco compreendido entre os lados de um ângulo inscrito; propriedades;*
- *Segmento de círculo maior e menor;*
- *Ângulo do segmento; ângulo ex-inscrito; propriedades;*
- *Ângulos de vértice no exterior ou no interior de um círculo e lados intersetando a respetiva circunferência; propriedades;*
- *Demonstração das fórmulas para a soma dos ângulos internos e de ângulos externos com vértices distintos de um polígono convexo; aplicações: demonstração da fórmula para a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência construção aproximada de um polígono regular de lados inscrito numa circunferência utilizando transferidor;*
- *Problemas envolvendo ângulos e arcos definidos numa circunferência e ângulos internos e externos de polígonos regulares.*

Para que este objetivos sejam alcançados, os discentes deverão atingir as seguintes metas curriculares [6]:
15. Conhecer propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência:

1. *Identificar «arco de circunferência» como a interseção de uma dada circunferência com um ângulo ao centro e utilizar corretamente o termo «extremos de um arco».*
2. *Designar, dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, não diametralmente opostos, por «arco menor AB», ou simplesmente «arco AB», o arco determinado na circunferência pelo ângulo ao centro convexo AOB.*
3. *Designar, dados dois pontos A e B de uma circunferência de centro O, não diametralmente opostos, por «arco maior AB», o arco determinado na circunferência pelo ângulo ao centro côncavo AOB.*
4. *Representar, dados três pontos A, B e P de uma dada circunferência, por arco APB o arco de extremos A e B que contém o ponto P.*

5. *Designar, dados dois pontos A e B de uma circunferência, por «corda AB» o segmento de reta $[AB]$, os arcos de extremos A e B por «arcos subtensos pela corda AB», e quando se tratar de um arco menor, designá-lo por «arco correspondente à corda AB».*

6. *Reconhecer, numa circunferência ou em circunferências iguais, que cordas e arcos determinados por ângulos ao centro iguais também são iguais e vice-versa.*

7. *Identificar a «amplitude de um arco de circunferência APB», como a amplitude do ângulo ao centro correspondente e representá-la por $\widehat{APB}$, ou simplesmente por $\widehat{AB}$ quando se tratar de um arco menor.*

8. *Reconhecer que são iguais arcos (respetivamente cordas) determinados por duas retas paralelas e entre elas compreendidos.*

9. *Demonstrar que qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda a bisseta, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes.*

10. *Designar por «ângulo inscrito» num arco de circunferência qualquer ângulo de vértice no arco e distinto dos extremos e com lados passando por eles, o arco por «arco capaz do ângulo inscrito» e utilizar corretamente a expressão «arco compreendido entre os lados» de um ângulo inscrito.*

11. *Demonstrar que a amplitude de um ângulo inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os respetivos lados e, como corolários, que ângulos inscritos no mesmo arco têm a mesma amplitude e que um ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.*

12. *Designar por «segmento de círculo» a região do círculo compreendida entre uma corda e um arco por ela subtenso, dito «maior» quando o arco for maior e «menor» quando o arco for menor.*

13. *Provar que um ângulo de vértice num dos extremos de uma corda, um dos lados contendo a corda e o outro tangente à circunferência («ângulo do segmento»), tem amplitude igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.*

14. *Designar por ângulo «ex-inscrito num arco de circunferência» um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar, e provar que a amplitude de um ângulo ex-inscrito é igual à semissoma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas que as retas suporte dos lados contêm.*

15. *Provar que a amplitude de um ângulo convexo de vértice no interior de um círculo é igual à semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto.*

16. *Provar que a amplitude de um ângulo de vértice exterior a um círculo e cujos lados o intersetam é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os respetivos lados.*

16. Resolver problemas

...

2. *Resolver problemas envolvendo a amplitude de ângulos e arcos definidos numa circunferência.*

3. *Resolver problemas envolvendo a amplitude de ângulos internos e externos de polígonos regulares inscritos numa circunferência.*

De salientar que, o domínio Geometria e Medida tem vindo a ocupar um lugar de destaque no programa de Matemática, visto que na prova final do 3.º ciclo do Ensino Básico, o peso atribuído é de 35 a 45 pontos em 100, sendo o domínio com maior cotação.

3.2 ENQUADRAMENTO TEÓRICO

O ensino da Geometria tem sofrido muitas alterações ao longo dos anos. A sua importância tem vindo a aumentar no currículo da Matemática.

No entanto, o seu ensino não tem sido consensual, pois existe quem defenda que se deve partir do elementar para o complexo e quem defenda o contrário. Antes da implementação do Novo Programa de Matemática, o ensino da Geometria incidia, em grande parte, em definições e propriedades que os alunos tinham de conhecer e saber. Neste momento, os discentes são levados pelo professor a construírem conjeturas e definições a partir de casos particulares. A demonstração de determinadas definições e propriedades tornou-se fulcral para a compreensão e relacionamento de diversos conceitos. ([7])

No subdomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência*, muitas são as definições e propriedades para lecionar. E a principal dificuldade dos alunos é relacionar, na resolução de um problema, vários conceitos quer deste domínio quer de outros domínios, nomeadamente *Álgebra* e *Números e Operações*.

Nesta dissertação serão utilizadas as seguintes notações:

- AB - reta que passa pelos ponto A e B;
- [AB] - segmento de reta de extremos A e B;
- $\overline{AB}$ - comprimento do segmento de reta [AB];

- $A\hat{B}C$ - amplitude do ângulo de vértice B e cujos lados passam em A e B;
- $\widehat{AB}$ - amplitude do arco menor de circunferência de extremos A e B.

As definições, propriedades, teoremas e demonstrações seguintes são baseados em [8], [9], [10], [11], [12], [13] e [14].

Definição 3.1 ***Circunferência*** *de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto O é r.*

$$\overline{OP} = r$$

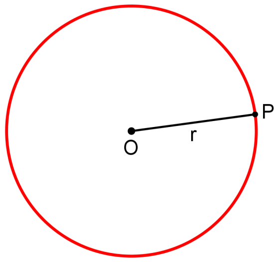


Figura 3.1: Circunferência

Definição 3.2 ***Círculo*** *de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao ponto O não é superior a r.*

$$\overline{OP} \leq r$$

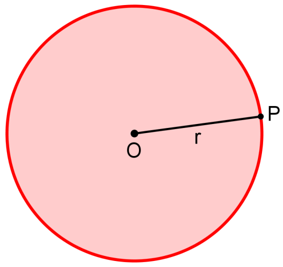


Figura 3.2: Círculo

Numa circunferência podem encontrar-se os seguintes elementos:

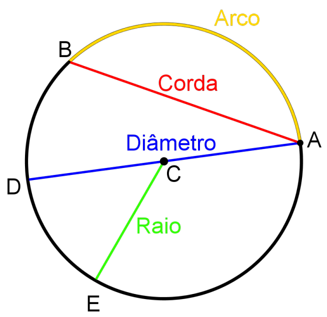


Figura 3.3: Elementos de uma circunferência

- **C** é centro da circunferência;
- $\overline{CE}$ é o raio;
- $\overline{AD}$ é o diâmetro;
- [AB] é uma corda.

Definição 3.3 ***Raio*** *é o comprimento do segmento de reta cujos extremos são um ponto da circunferência e o centro.*

Para simplificar a linguagem, o termo ***raio*** de uma circunferência é também utilizado para referir um segmento de reta que une o centro a um ponto da circunferência.

Definição 3.4 ***Corda*** *é um segmento de reta que une dois pontos da circunferência.*

Definição 3.5 ***Diâmetro*** *é o comprimento da corda que passa pelo centro da circunferência.*

Definição 3.6 ***Arco*** *é a porção de circunferência compreendida entre dois dos seus pontos. Observando a figura 3.3, e dada a corda* $[AB]$*, consideram-se:*

- ***arcos subtensos*** *à corda* $[AB]$*, os arcos de extremos* A *e* B *(arco menor* AB *e arco maior* ADB*);*
- *se a corda não passa pelo centro, então, o* ***arco correspondente*** *à corda é o menor dos arcos subtensos à corda.*

Definição 3.7 ***Amplitude de um arco de circunferência*** *é a medida do ângulo com vértice no centro da circunferência e definido pelos extremos do arco.*

Sejam uma circunferência de centro O e as retas r, s, e t. Em relação à circunferência as retas podem ser:

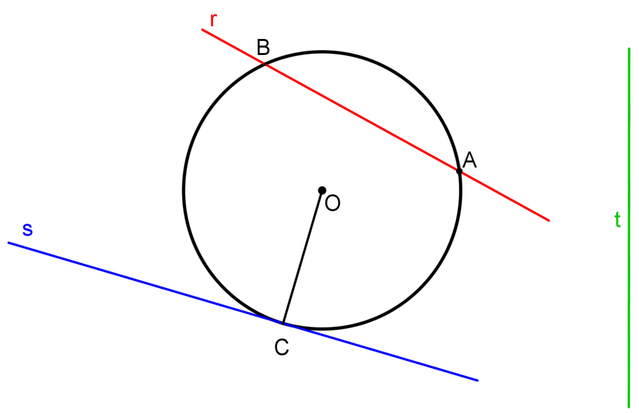


Figura 3.4: Posição relativa de uma reta e uma circunferência

- **Secante** à circunferência quando interseta a circunferência em dois pontos distintos, como ilustra a reta r na figura 3.4.
- **Tangente** à circunferência, quando a reta interseta a circunferência num único ponto, o qual se designa por ponto de tangência, como ilustra a reta s na figura 3.4.
- **Exterior** à circunferência, quando não tem nenhum ponto em comum com a circunferência, como ilustra a reta t na figura 3.4.

Propriedade 3.1 ***Propriedade da reta tangente***

Uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Demonstração:

Hipótese: t é tangente à circunferência e T é o ponto de tangência;
Tese: $[OT] \perp t$

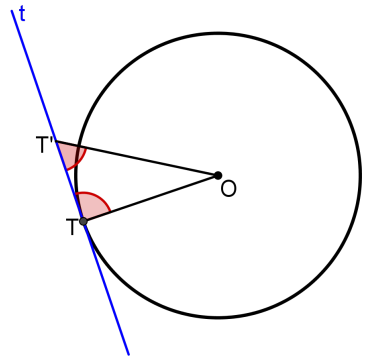


Figura 3.5: Propriedade da reta tangente

Se a reta tangente não fosse perpendicular ao raio no ponto de tangência, $[OT]$ formaria com a reta t um ângulo agudo, e existiria um ponto $T' \in t$, de tal modo que o triângulo $[OTT']$ fosse isósceles.

Então, como $\overline{OT} = \overline{OT'} = r$, o ponto T' pertencia à circunferência, e a reta t teria dois pontos comuns com a circunferência, o que é um absurdo, pois, por hipótese, a reta t é tangente à circunferência.

Assim, a reta t é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Isto é, $\overline{OT} \perp t$.

Numa circunferência consideram-se vários tipos de ângulos de acordo com a posição do vértice e das semirretas que contêm os lados do ângulo.

Definição 3.8 ***Ângulo*** *é uma região do plano limitada por duas semirretas com a mesma origem.*

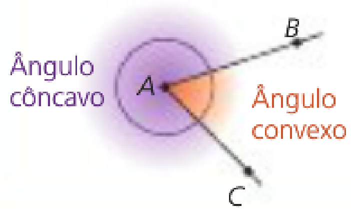


Figura 3.6: Ângulo

Amplitude de um ângulo *corresponde à abertura do ângulo, e é medida em graus no 3.º ciclo do Ensino Básico.*

Definição 3.9 *A* ***medida da amplitude de um arco****, em graus, é igual ao quociente entre o comprimento do arco e o comprimento da circunferência toda, multiplicado por* $360°$.

Definição 3.10 ***Ângulo ao centro*** *relativo a uma circunferência é qualquer ângulo cujo vértice coincide com o centro da circunferência. A interseção de uma circunferência com um ângulo ao centro designa-se por arco de circunferência.*

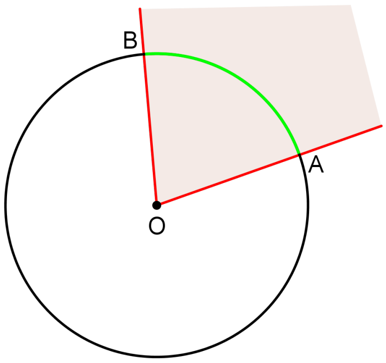


Figura 3.7: Ângulo ao centro

A ***medida da amplitude de um ângulo ao centro*** *é igual à medida da amplitude do arco que lhe corresponde.*

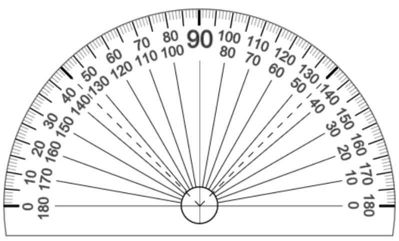


Figura 3.8: Transferidor 180°

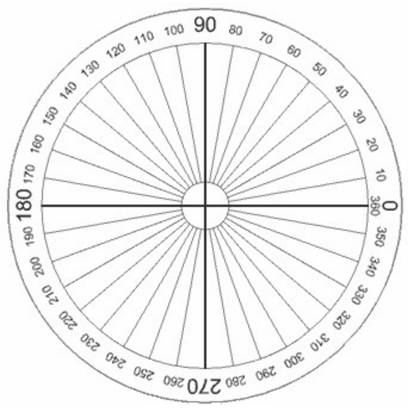


Figura 3.9: Transferidor 360°

Um transferidor é um instrumento de medição de amplitude de ângulos. Este transfere a medida do ângulo para a medida do arco.

O centro do transferidor é colocado no vértice do ângulo que se pretende medir a amplitude, o qual também coincide com o centro da circunferência.

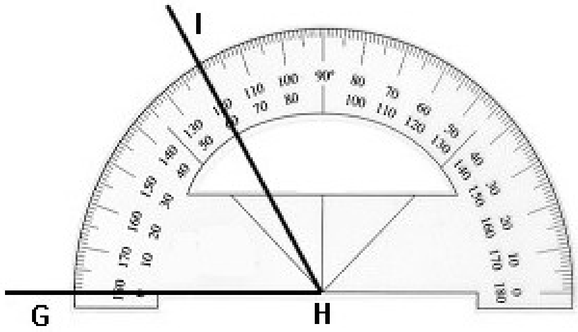


Figura 3.10: Medição de um ângulo usando um transferidor

Na figura 3.10 podemos verificar que $G\widehat{H}I = \widehat{GI}$.

Definição 3.11 *Duas* ***figuras*** *dizem-se* ***geometricamente iguais*** *se têm a mesma área, a mesma forma e as mesmas dimensões, isto é, sobrepõem-se ponto por ponto.*

Propriedades geométricas em circunferências:

- Numa circunferência ou em circunferências congruentes, arcos e cordas determinados por ângulos ao centro de igual amplitude têm igual amplitude e vice-versa.

  Demonstração:

  1.º caso:

  Considere-se a circunferência centrada no ponto O e dois ângulos ao centro AOB e COD, de igual amplitude.

  Pretende-se mostrar que $\widehat{AB}$=$\widehat{CD}$ e $\overline{AB} = \overline{CD}$.

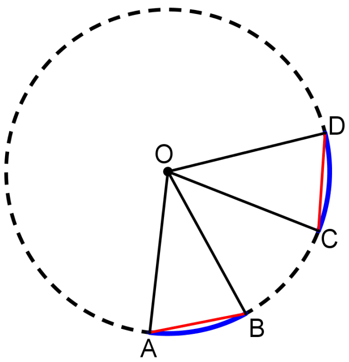


Figura 3.11: Propriedades geométricas em circunferências

Como $A\widehat{O}B$=$\widehat{AB}$, $C\widehat{O}D$=$\widehat{CD}$ e $A\widehat{O}B$=$C\widehat{O}D$, então $\widehat{AB}$=$\widehat{CD}$.

Como $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO}$ e $A\hat{O}B$=$C\hat{O}D$, pelo critério LAL da igualdade de triângulos (Dois triângulos são congruentes se têm dois lados correspondentes iguais e os ângulos por eles formado com a mesma amplitude), conclui-se que os triângulos [AOB] e [COD] são geometricamente iguais.

2.º caso:

Considerem-se duas circunferências geometricamente iguais, ou seja, com o mesmo raio e dois ângulos ao centro AOB e DCE, de igual amplitude.

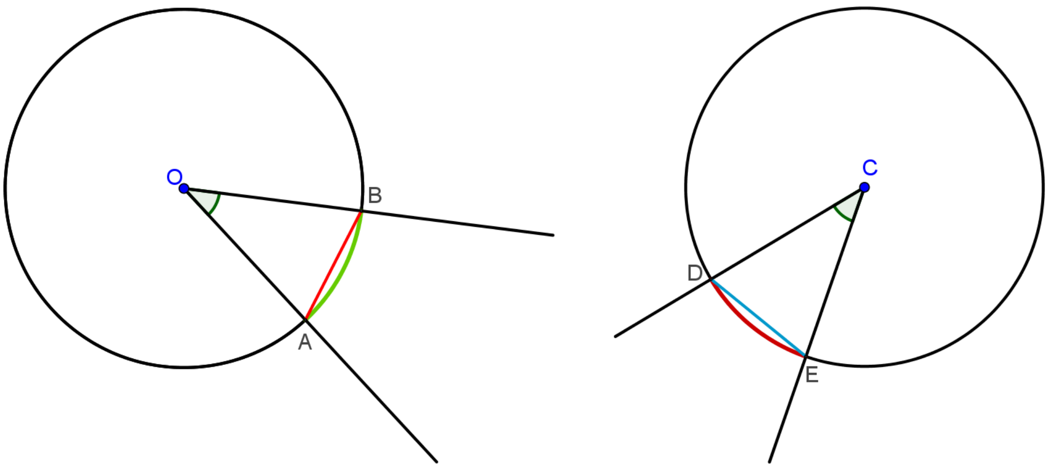


Figura 3.12: Propriedades geométricas em circunferências

Pretende-se mostrar que $\widehat{AB}$=$\widehat{DE}$ e $\overline{AB} = \overline{DE}$.

Como $A\hat{O}B = D\hat{C}E$, $A\hat{O}B = \widehat{AB}$ e $D\hat{C}E = \widehat{DE}$, então $\widehat{AB} = \widehat{DE}$.

Como $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CD} = \overline{CE}$ e $A\hat{O}B = D\hat{C}E$, pelo critério LAL da igualdade de triângulos, conclui-se que os triângulos [AOB] e [CDE] são geometricamente iguais.

Então, $\overline{AB} = \overline{DE}$.

- Qualquer reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda, bisseta-a, assim como aos arcos subtensos e aos ângulos ao centro correspondentes.

Demonstração:

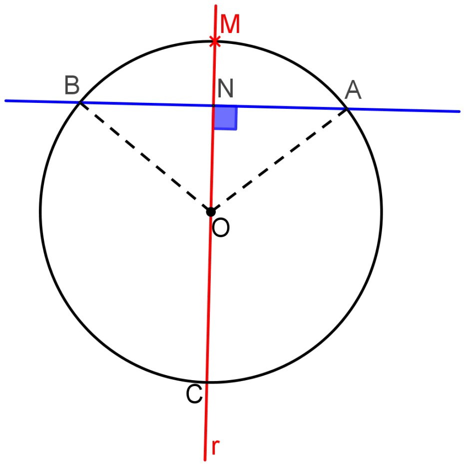


Figura 3.13: Reta perpendicular a uma corda

Pretende-se mostrar que $\overline{AN} = \overline{BN}$ e $\widehat{AM}$=$\widehat{BM}$.

Os triângulos $[ANO]$ e $[BNO]$ são retângulos em N, ponto de interseção entre a reta r e a corda $[AB]$.

$[AO]$ e $[BO]$ são raios da circunferência. Então, $\overline{OA} = \overline{OB}$.

O lado $[ON]$ é comum aos dois triângulos.

Aplicando o Teorema de Pitágoras a ambos os triângulos, tem-se:

$$\overline{AO}^2 = \overline{NO}^2 + \overline{AN}^2 \Leftrightarrow \overline{AN} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{NO}^2} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \overline{BO}^2 &= \overline{NO}^2 + \overline{BN}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AO}^2 &= \overline{NO}^2 + \overline{BN}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{BN} &= \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{NO}^2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Comparando as igualdades 3.1 e 3.2, tem-se que $\overline{AN} = \overline{BN}$.

Então, N é o ponto médio da corda $[AB]$.

Pelo critério LLL da igualdade de triângulos (dois triângulos são congruentes se têm os três lados com o mesmo comprimento), conclui-se que os triângulos são congruentes.

Logo, $A\hat{O}M = B\hat{O}M$.

Como a ângulos ao centro de igual amplitude correspondem arcos de igual amplitude, conclui-se que $\widehat{AM} = \widehat{BM}$.

- Arcos e cordas compreendidos entre retas paralelas são iguais.

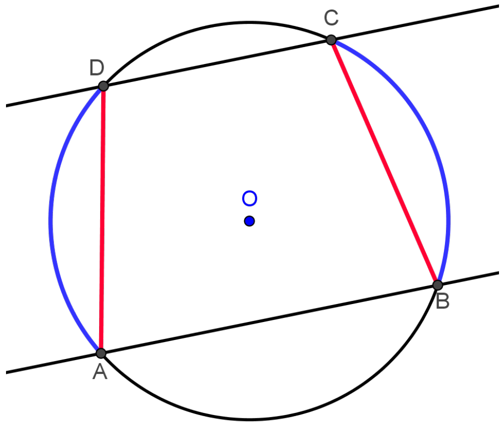


Figura 3.14: Arcos e cordas compreendidos entre retas paralelas

Demonstração:

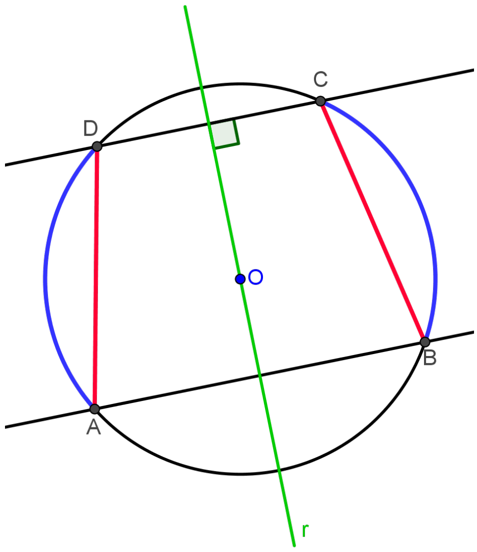


Figura 3.15: Arcos e cordas

Pretende-se mostrar que são geometricamente iguais as cordas $[AD]$ e $[BC]$, e os arcos AD e BC.

Considere-se $AB \parallel CD$.

Considere-se a reta r que contém o centro da circunferência e é perpendicular à corda $[CD]$. Como $AB \parallel CD$, a reta r também é perpendicular a $[AB]$.

Pela propriedade anterior, podemos concluir que a reta r é a mediatriz de $[CD]$ e de $[AB]$.

Considerando a reflexão de eixo r, verifica-se que a corda $[AD]$ é a imagem da corda $[BC]$ e que o arco AD é imagem do arco BC.

Como a reflexão é uma isometria, as cordas $[AD]$ e $[BC]$ são geometricamente iguais, assim como o arco AD é geometricamente igual ao arco BC.

Definição 3.12 ***Ângulo inscrito*** *num arco de circunferência é qualquer ângulo que tenha o vértice na circunferência e os lados secantes à circunferência.*

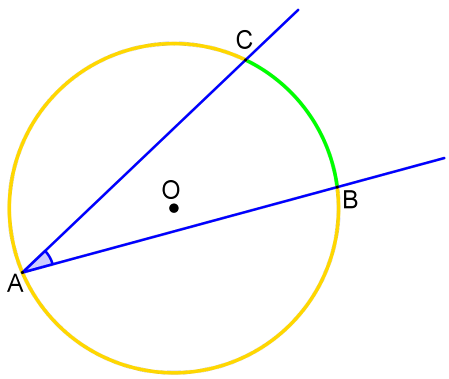


Figura 3.16: Ângulo inscrito

Designa-se por ***arco capaz*** *do ângulo inscrito o arco a que pertence o vértice do ângulo.*

Observando a figura 3.16, diz-se que, em relação ângulo BAC, o arco BC é o arco compreendido entre os lados do ângulo e que o arco CAB é o arco capaz do ângulo.

Teorema 3.1 *A* ***amplitude de um ângulo inscrito*** *é metade da amplitude do arco de circunferência compreendido entre os seus lados.*

Demonstração:

1.º caso: O centro da circunferência pertence a um dos lados do ângulo inscrito.

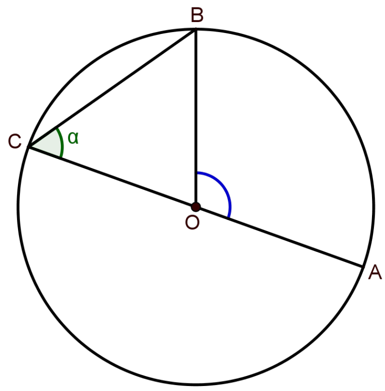


Figura 3.17: Ângulo inscrito

Pretende-se mostrar que $B\hat{C}O = \frac{\widehat{AB}}{2}$.

Considere-se o ângulo inscrito BCO de amplitude α.

$A\hat{O}B = \widehat{AB}$, pois a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do seu arco correspondente.

$\overline{OB} = \overline{OC}$, pois são raios da circunferência. Logo, o triângulo BCO é isósceles.

$O\hat{B}C = B\hat{C}O = \alpha$, pois num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais.

$A\hat{O}B = O\hat{B}C + B\hat{C}O$, pois em qualquer triângulo a amplitude de qualquer ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

Então, $A\hat{O}B = O\hat{B}C + B\hat{C}O = \alpha + \alpha = 2\alpha$. Logo,

$$\widehat{AB} = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\widehat{AB}}{2} \Leftrightarrow B\hat{C}O = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

2.º caso: O centro da circunferência pertence ao ângulo inscrito.

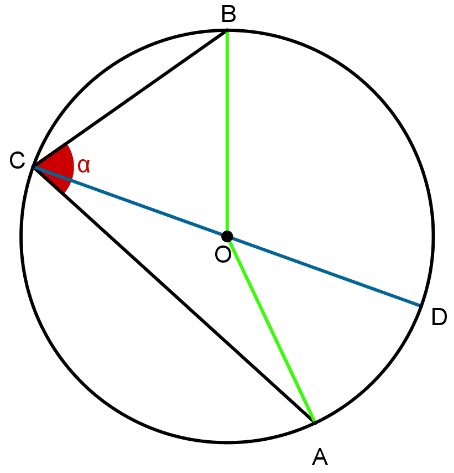


Figura 3.18: Ângulo inscrito

Considere-se o ângulo inscrito ACB.
Pretende-se mostrar que $A\widehat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$. Pelo caso anterior, tem-se que:

$$A\widehat{C}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \quad e \quad B\widehat{C}D = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}.$$

Como $A\widehat{C}B = A\widehat{C}D + B\widehat{C}D$, então.

$$A\widehat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}.$$

3.º caso: O centro da circunferência não pertence ao ângulo inscrito.

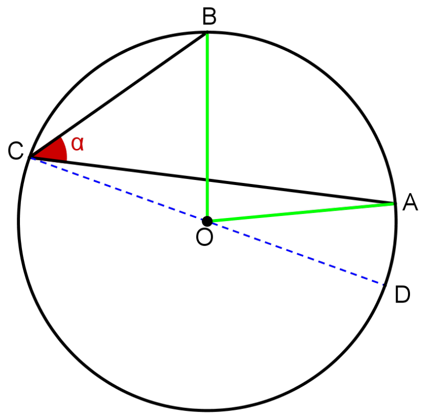


Figura 3.19: Ângulo inscrito

Considere-se o ângulo inscrito ACB.
Pretende-se mostrar que $A\widehat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$.
Pelo 1.º caso, $A\widehat{C}D = \frac{\widehat{AD}}{2}$ e $B\widehat{C}D = \frac{\widehat{BD}}{2}$.
Como $A\widehat{C}B = B\widehat{C}D - A\widehat{C}D$, então,

$$A\widehat{C}B = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{BD} - \widehat{AD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2}.$$

Propriedades dos ângulos inscritos

- Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência têm a mesma amplitude.

  Demonstração:

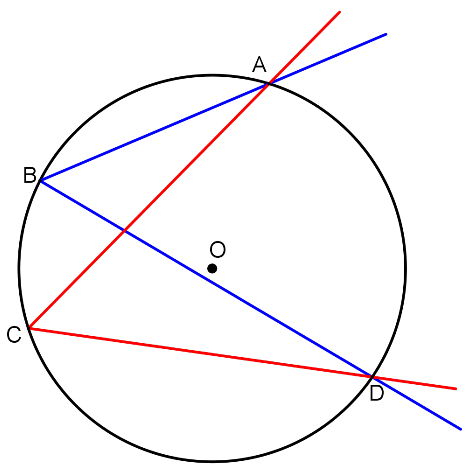


Figura 3.20: Ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência

Considere-se uma circunferência de centro O que contém os pontos A, B, C e D, como ilustrado na figura 3.20. Os ângulos ABD e ACD são ângulos inscritos no mesmo arco ABD.

Pretende-se mostrar que $A\widehat{B}D = A\widehat{C}D$.

Pelo teorema 3.1, conclui-se que $A\widehat{B}D = \frac{\widehat{AD}}{2}$ e $A\widehat{C}D = \frac{\widehat{AD}}{2}$.

Logo, $A\widehat{B}D = A\widehat{C}D$.

- Qualquer ângulo inscrito numa semicircunferência é um ângulo reto.

  <u>*Demonstração:*</u>

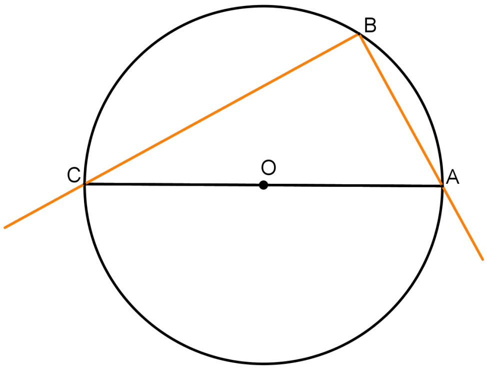


Figura 3.21: Ângulo inscrito numa semicircunferência

Considere-se a circunferência de centro O e os pontos A, B e C pertencentes à circunferência.

Pretende-se mostrar que $A\hat{B}C = 90°$.

$[AC]$ é um diâmetro da circunferência. Logo, $\widehat{AC} = 180°$, sendo AC o arco compreendido entre os lados do ângulo ABC.

Sendo ABC um ângulo inscrito, então pelo teorema 3.1, $A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$.

Definição 3.13 ***Segmento de círculo*** *é a região do círculo compreendida entre uma corda e um arco por ela subtenso, denominado maior quando o arco for maior e menor quando o arco for menor.*

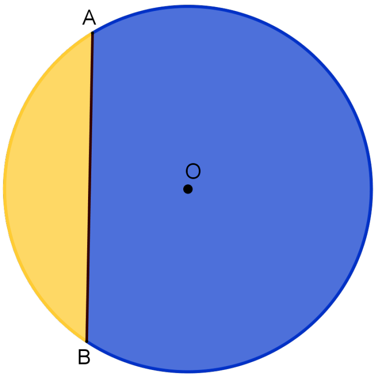


Figura 3.22: Segmento de círculo

Na figura 3.22, a corda $[AB]$ divide a circunferência em dois segmentos de círculo: o menor (colorido a amarelo) e o maior (colorido a azul).

Definição 3.14 *Um* ***ângulo*** *diz-se* ***excêntrico*** *a uma circunferência, quando não tem o vértice no centro da circunferência.*

Note-se que, um ângulo inscrito num arco de circunferência também é um ângulo excêntrico, pois o vértice pode estar em qualquer ponto do plano, exceto no centro da circunferência.

Definição 3.15 ***Ângulo de um segmento*** *é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um dos lados é secante e outro é tangente à circunferência. (fig.3.23)*

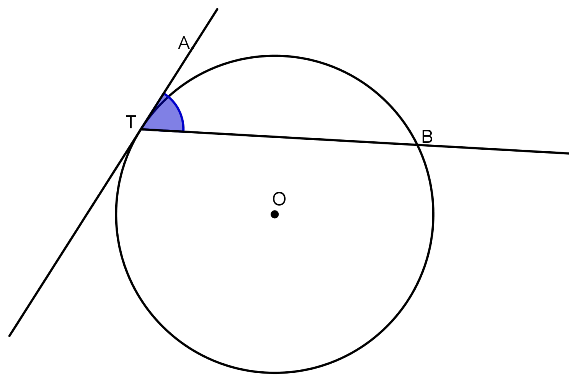


Figura 3.23: Ângulo de um segmento

Teorema 3.2 *A* ***amplitude de um ângulo de um segmento*** *é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.*

Demonstração:

1.º caso: O ângulo é agudo.

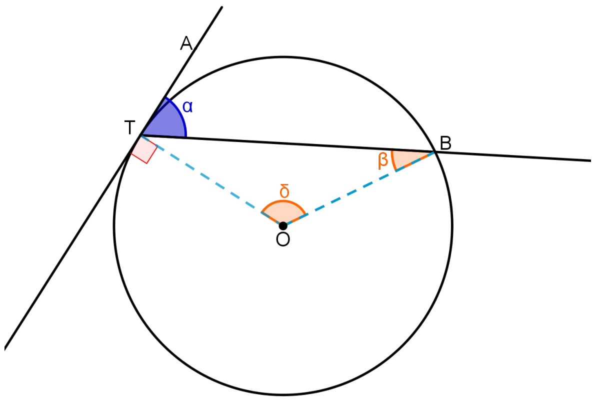


Figura 3.24: Ângulo de um segmento agudo

Pretende-se mostrar que $A\hat{T}B = \frac{\widehat{BT}}{2}$.

O triângulo BOT é um triângulo isósceles, pois $[OT]$ e $[OB]$ são raios da circunferência. Logo, $O\hat{B}T = B\hat{T}O$.

Considere-se $O\hat{B}T = \beta$ e $B\hat{O}T = \delta$.

$$\begin{aligned} & O\hat{B}T + B\hat{T}O + B\hat{O}T = 180° \\ \Leftrightarrow & \beta + \beta + \delta = 180° \\ \Leftrightarrow & 2\beta = 180° - \delta \\ \Leftrightarrow & \beta = \frac{180° - \delta}{2} \\ \Leftrightarrow & \beta = 90° - \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \beta = 90° - \frac{\widehat{BT}}{2}, \tag{3.3}$$

visto que BOT é um ângulo ao centro.

Sendo AT uma reta tangente à circunferência, $A\hat{T}O = 90°$. Como os ângulos BTO e ATB são complementares, pois a sua soma é $90°$, então,

$$B\hat{T}O = 90° - A\hat{T}B \Leftrightarrow \beta = 90° - A\hat{T}B. \tag{3.4}$$

Das igualdades anteriores 3.3 e 3.4, conclui-se que:

$$90° - \frac{\widehat{BT}}{2} = 90° - A\hat{T}B \Leftrightarrow A\hat{T}B = \frac{\widehat{BT}}{2}$$

2.º caso: O ângulo é reto.

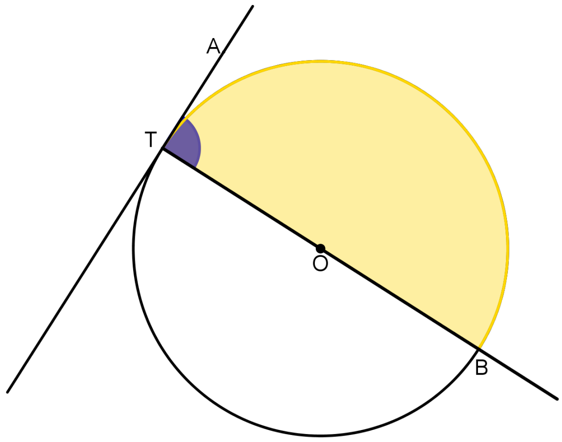


Figura 3.25: Ângulo de segmento reto

Pretende-se mostrar que $A\hat{T}B = \frac{\widehat{BT}}{2}$.

Como já demonstrado anteriormente, qualquer reta tangente à circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Logo, $A\hat{T}B = 90°$.

Sendo $[BT]$ um diâmetro da circunferência, então $\widehat{BT} = 180°$. Logo, $A\hat{T}B = \frac{\widehat{BT}}{2}$.

3.º caso: O ângulo é obtuso.

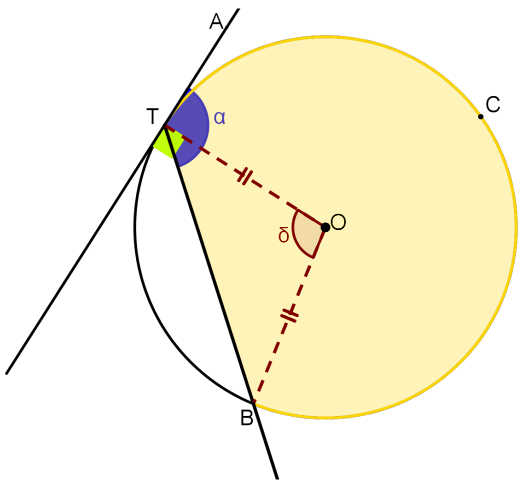


Figura 3.26: Ângulo de um segmento obtuso

Pretende-se mostrar que $\alpha = \frac{\widehat{BCT}}{2}$.

O triângulo $[BOT]$ é um triângulo isósceles, pois $[OT]$ e $[BO]$ são raios da circunferência. Logo, $O\hat{B}T = B\hat{T}O$. C é um ponto da circunferência do arco maior subtenso à corda $[BT]$.

Sendo $A\hat{T}B = \alpha$, $B\hat{O}T = \widehat{BT} = 360° - \widehat{BCT}$, $A\hat{T}O = 90°$ e $O\hat{B}T = B\hat{T}O = \alpha - 90°$, tem-se que:

$$
\begin{aligned}
&O\hat{B}T + B\hat{T}O + B\hat{O}T = 180^\circ \\
\Leftrightarrow&(\alpha - 90^\circ) + (\alpha - 90^\circ) + (360^\circ - \widehat{BCT}) = 180^\circ \\
\Leftrightarrow&2\alpha = \widehat{BCT} \\
\Leftrightarrow&\alpha = \frac{\widehat{BCT}}{2}
\end{aligned}
$$

Definição 3.16 ***Ângulo ex-inscrito*** *num arco de circunferência é um ângulo adjacente a um ângulo inscrito e a ele suplementar.*

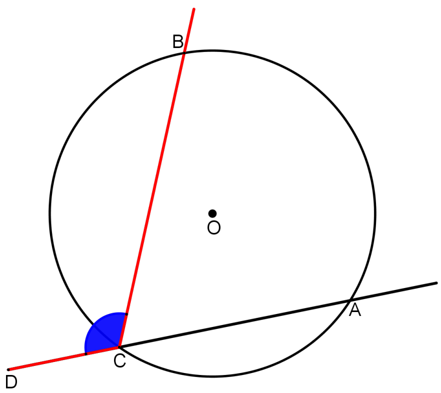


Figura 3.27: Ângulo ex-inscrito

Teorema 3.3 *A* ***amplitude de um ângulo ex-inscrito*** *é igual a metade da soma das amplitudes dos arcos correspondentes às cordas contidas nas retas suporte dos lados do ângulo.*

Demonstração:
Considere-se a figura 3.27. Pretende-se mostrar que $B\hat{C}D = \frac{\widehat{BC}+\widehat{AC}}{2}$.
Sendo ACB e BCD ângulos suplementares, tem-se que:

$$A\hat{C}B + B\hat{C}D = 180^\circ \Leftrightarrow B\hat{C}D = 180^\circ - A\hat{C}B.$$

Como ACB é um ângulo inscrito, então $A\hat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$ e $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{AC} = 360^\circ$.

Logo, $B\hat{C}D = 180^\circ - A\hat{C}B = 180^\circ - \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{360^\circ - \widehat{AB}}{2}$.

Como $360^\circ - \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AC}$, então $B\hat{C}D = \frac{\widehat{BC}+\widehat{AC}}{2}$.

Definição 3.17 ***Ângulo convexo com vértice no interior*** *de um círculo é um ângulo que tem o vértice no interior e os seus lados são secantes à circunferência.*

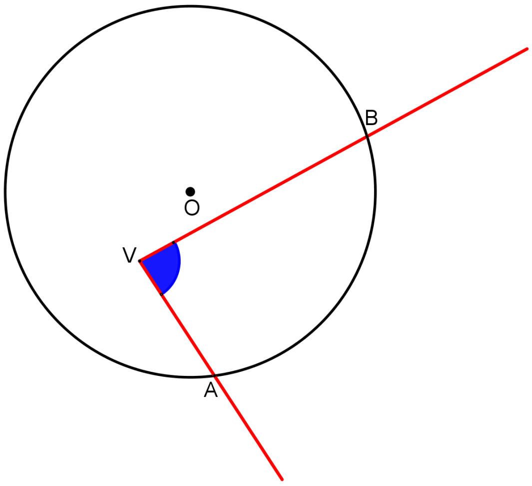


Figura 3.28: Ângulo com vértice no interior da circunferência

Note-se que um ângulo ao centro é um ângulo convexo.

Teorema 3.4 *A* ***amplitude de um ângulo convexo com vértice no interior de um círculo*** *é igual semissoma das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo e os lados do ângulo verticalmente oposto.*

Demonstração:

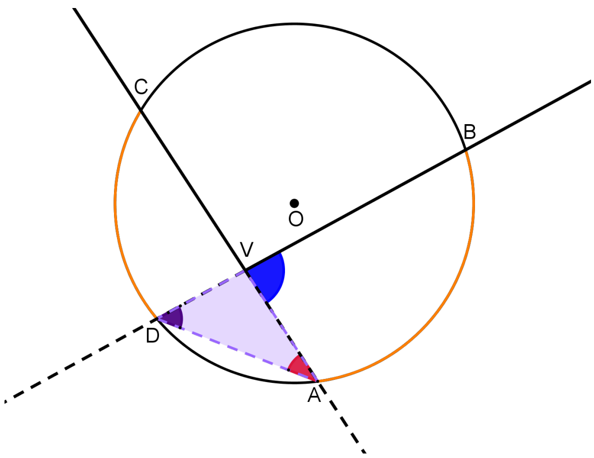


Figura 3.29: Ângulo com vértice no interior da circunferência

Considere-se o triângulo $[ADV]$.
Pretende-se mostrar que $A\widehat{V}B = \frac{\widehat{CD}+\widehat{AB}}{2}$.

Os ângulos CAD e ADB são inscritos em arcos de circunferência. Então, $C\widehat{A}D = \frac{\widehat{CD}}{2}$ e $A\widehat{D}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$.

O ângulo AVB é um ângulo externo do triângulo $[ADV]$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&A\widehat{V}B = C\widehat{A}D + A\widehat{D}B \\
\Leftrightarrow &A\widehat{V}B = \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} \\
\Leftrightarrow &A\widehat{V}B = \frac{\widehat{CD} + \widehat{AB}}{2}
\end{aligned}
$$

Definição 3.18 ***Ângulo convexo com vértice exterior*** *a um círculo é um ângulo cujo vértice se encontra no exterior do círculo e cujos lados são secantes à circunferência.*

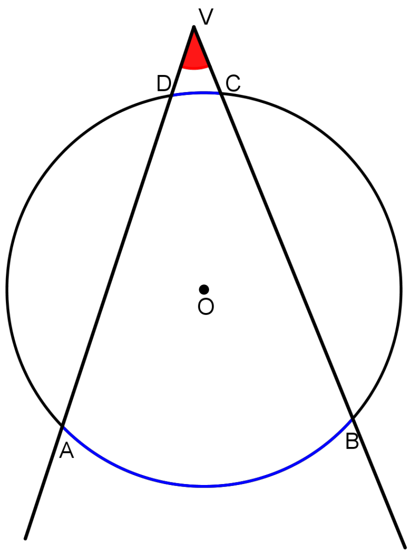


Figura 3.30: Ângulo com vértice no exterior da circunferência

Teorema 3.5 *A* ***amplitude de um ângulo convexo com vértice exterior a um círculo*** *é igual à semidiferença entre a maior e a menor das amplitudes dos arcos compreendidos entre os lados do ângulo.*

Demonstração:

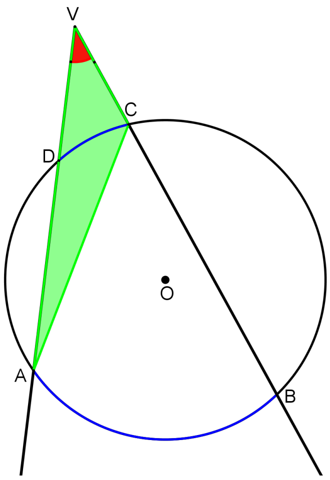


Figura 3.31: Ângulo com vértice no exterior da circunferência

Considere-se o triângulo $[ACV]$.

Pretende-se mostrar que $A\widehat{V}B = \frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{2}$.

$C\widehat{A}V = \frac{\widehat{CD}}{2}$, pois CAV é um ângulo inscrito no arco BAD.

ACB é um ângulo externo do triângulo $[ACV]$ e um ângulo inscrito no arco ADB. Logo, $A\widehat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2}$ e $A\widehat{C}B = A\widehat{V}B + C\widehat{A}V$.

Então,

$$A\widehat{V}B = A\widehat{C}B - C\widehat{A}V$$
$$\Leftrightarrow A\widehat{V}B = \frac{\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2}$$
$$\Leftrightarrow A\widehat{V}B = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

3.3 AS DIFICULDADES MAIS FREQUENTES RELATIVAS ÀS PROPRIEDADES DE ÂNGULOS, CORDAS E ARCOS DEFINIDOS NUMA CIRCUNFERÊNCIA

O domínio da Geometria é onde os alunos, na generalidade, apresentam mais dificuldades. A dificuldade na visualização, no manuseamento do material de desenho, nomeadamente, do compasso e do transferidor, condiciona muito a aprendizagem da Geometria.

No subdomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência*, para além das dificuldades referidas, os alunos demonstram dificuldades:

- em identificar os elementos representados numa figura, isto é, dificuldade em identificar os tipos de ângulos, bem como estabelecer relações entre ângulos, arcos e cordas.
- no relacionamento de conceitos e/ou propriedades, visto que, neste capítulo são muitas as definições e as propriedades que os alunos têm de apreender;
- em definir estratégias de resolução dos exercícios, bem como justificar o seu raciocínio, utilizando uma linguagem matematicamente correta;
- em interpretar os dados do problema, principalmente se os dados não estiverem representados na figura.

3.4 RECURSOS DIGITAIS DESENVOLVIDOS

Após a análise dos modelos existentes no PmatE, verifiquei que o sudomínio *Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência* tinha poucos exercícios para o que é exigido no Novo Programa. Por este motivo, decidi construir modelos referentes a esta temática, escolhendo exercícios que envolvessem vários conceitos e que relacionassem várias propriedades estudadas.

Para construir os novos modelos, utilizei a ferramenta *ModelMaker*, cuja utilização se descreve a seguir.

Para tal, comecei por catalogar os modelos quanto à área científica, área (domínio), tema (subdomínio), ciclo de ensino, nível de dificuldade e tipo de modelo.

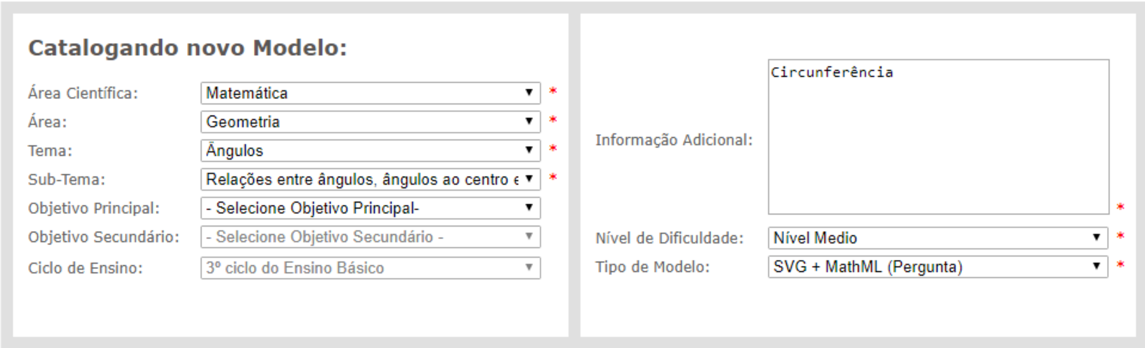


Figura 3.32: Catalogação dos exercícios

Os exercícios que parametrizei têm como objetivo a identificação dos diversos elementos da figura, nomeadamente, os tipos de ângulos representados, bem como, identificar relações entre as amplitudes dos ângulos e dos arcos, utilizando as propriedades estudadas.

A parametrização dos exercícios não foi uma tarefa fácil. Construir as imagens adequadas, enunciar o exercício e parametrizar as variáveis foi moroso, pois todas as condicionantes estavam interligadas e era necessário conjugá-las de forma a que os exercícios ilustrassem o pretendido. Por outro lado, era necessário escolher valores que não dificultassem a resolução dos exercícios por parte dos alunos.

Neste exercício em concreto, na figura está representado um ângulo de um segmento. E é através da figura e dos dados fornecidos que os alunos são conduzidos a consolidar os conteúdos aprendidos.

Após catalogar o modelo, foi inserida a respetiva questão:

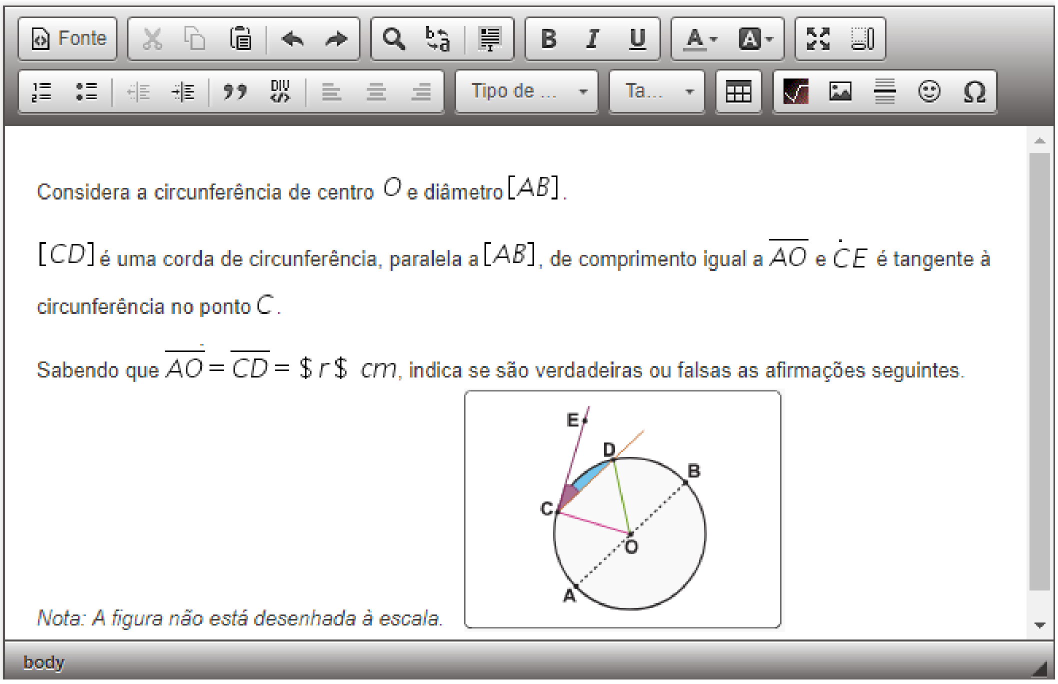


Figura 3.33: Enunciado

Para este exercício foi definido o parâmetro r, o qual seria um número inteiro pertencente ao intervalo de $[1, 20]$.

Os intervalos foram definidos com o intuito de criar, de forma aleatória, uma variedade de enunciados para cada questão gerada, sem no entanto envolver cálculos demasiado complexos uma vez que não é esse o propósito dos exercícios.

Seguidamente enunciaram-se as respostas, igualmente parametrizadas:

Resposta 1:

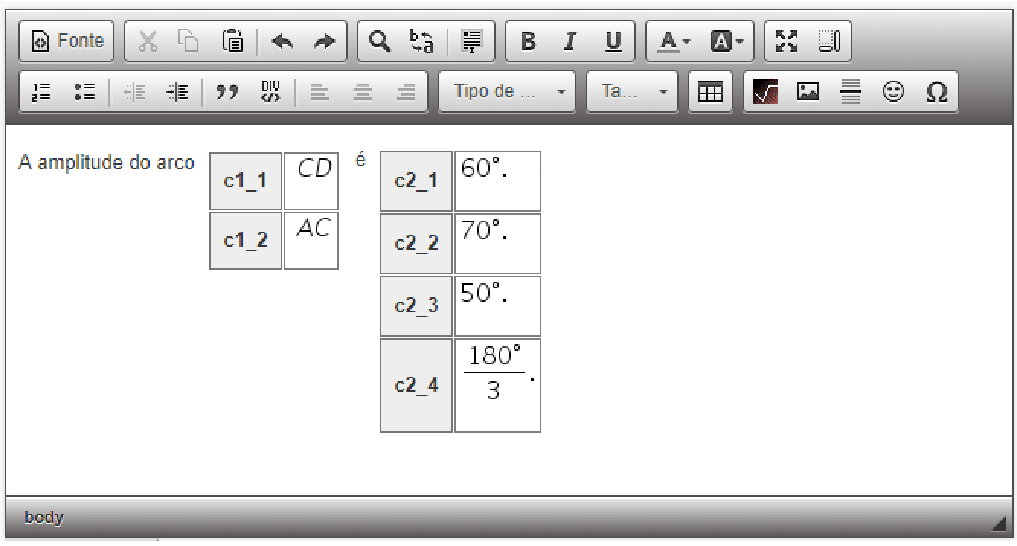


Figura 3.34: Resposta 1

De forma a garantir a veracidade da resposta procedeu-se à validação do modelo, definindo que esta é verdadeira sempre que são aleatoriamente selecionadas as células $c2\_1$ ou $c2\_4$:

Validação da resposta 1:

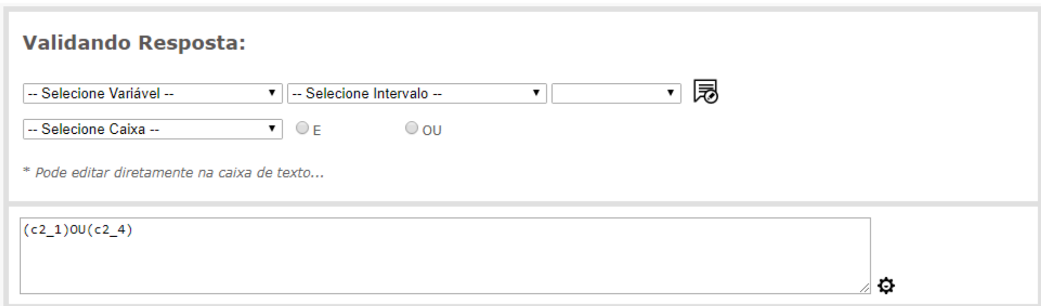


Figura 3.35: Validação da resposta 1

Resposta 2:

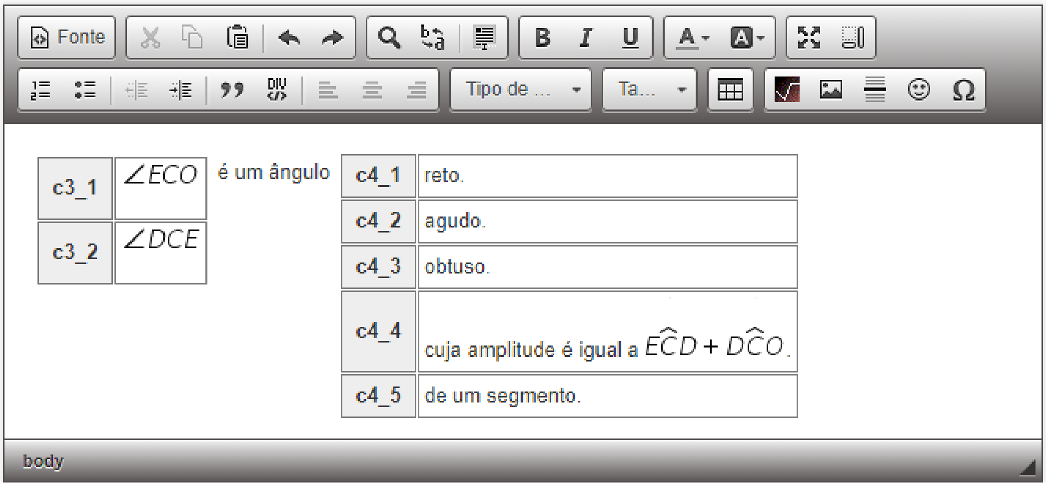


Figura 3.36: Resposta 2

Validação da resposta 2:

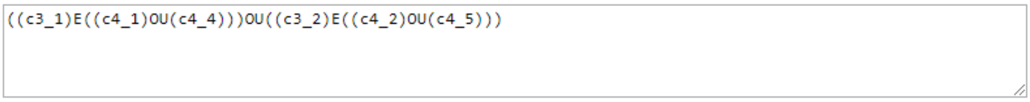


Figura 3.37: Validação da resposta 2

Resposta 3:

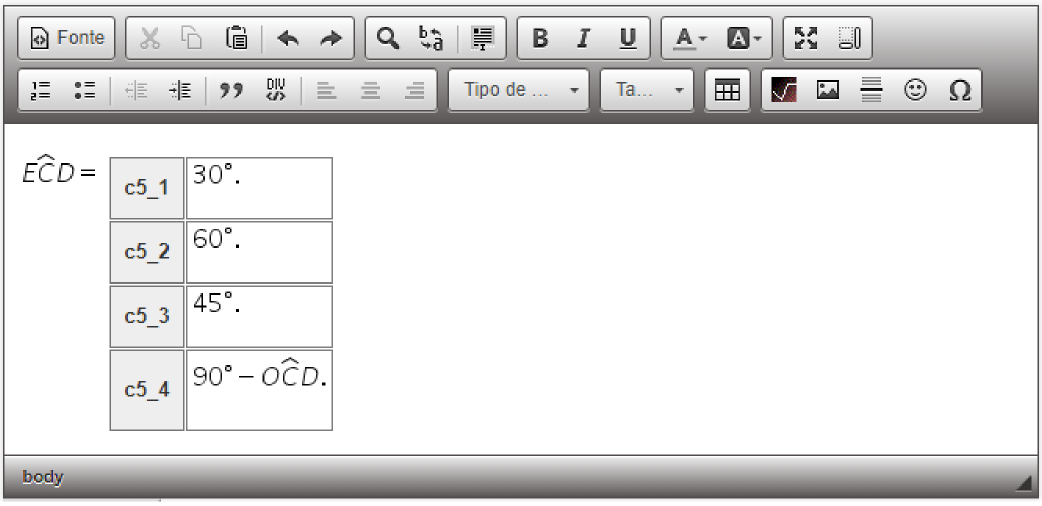


Figura 3.38: Resposta 3

Validação da resposta 3:

```
(c5_1)OU(c5_4)
```

Figura 3.39: Validação da resposta 3

Resposta 4:

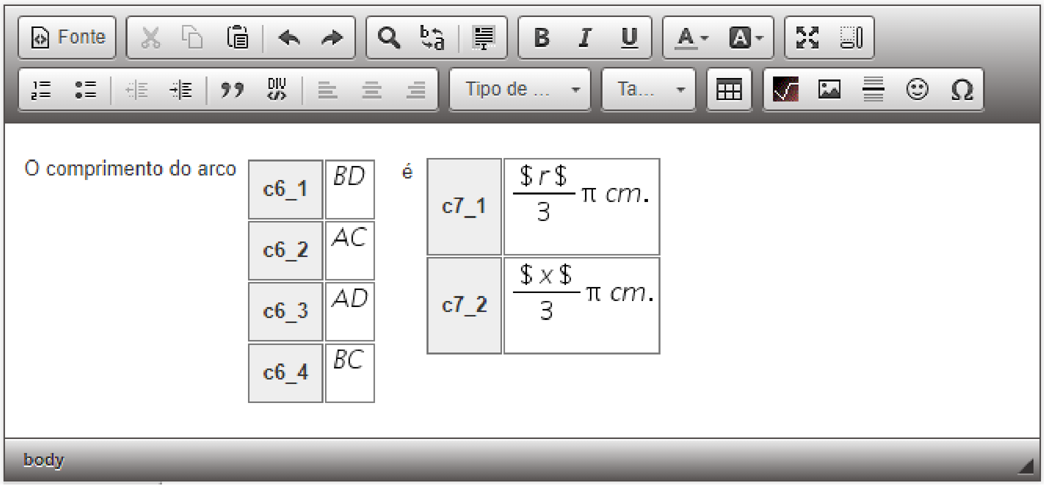


Figura 3.40: Resposta 4

Para esta resposta foi introduzida uma variável auxiliar x, tal que, $x = 2 \times r$, que toma valores ao acaso num intervalo definido.

Validação da resposta 4:

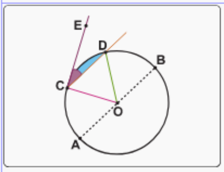
```
(((c6_1)OU(c6_2))E(c7_1))OU(((c6_3)OU(c6_4))E(c7_2))
```

Figura 3.41: Validação da resposta 4

De seguida são apresentadas quatro concretizações do mesmo exercício, nas quais as afirmações verdadeiras estão assinaladas com um ✓.

Concretização 1:

Gerador de Questão



Considera a circunferência de centro O e diâmetro $[AB]$.
$[CD]$ é uma corda de circunferência, paralela a $[AB]$, de comprimento igual a $\overline{AO}$ e $\dot{C}E$ é tangente à circunferência no ponto C.
Sabendo que $\overline{AO} = \overline{CD} = 10\ cm$, indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

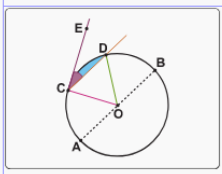
Gerador de Resposta

A amplitude do arco AC é 50°.	☐
$\angle ECO$ é um ângulo reto.	☑
$E\hat{C}D = 90^\circ - O\hat{C}D$.	☑
O comprimento do arco AC é $\frac{10}{3}\pi\ cm$.	☑

Figura 3.42: Concretização 1

Concretização 2:

Gerador de Questão



Considera a circunferência de centro O e diâmetro $[AB]$.
$[CD]$ é uma corda de circunferência, paralela a $[AB]$, de comprimento igual a $\overline{AO}$ e $\dot{C}E$ é tangente à circunferência no ponto C.
Sabendo que $\overline{AO} = \overline{CD} = 7\ cm$, indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

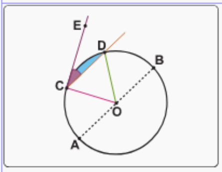
Gerador de Resposta

A amplitude do arco CD é $\frac{180^\circ}{3}$.	☑
$\angle ECO$ é um ângulo de um segmento.	☐
$E\hat{C}D = 60^\circ$.	☐
O comprimento do arco BD é $\frac{14}{3}\pi\ cm$.	☐

Figura 3.43: Concrtização 2

Concretização 3:

Gerador de Questão



Considera a circunferência de centro O e diâmetro $[AB]$.
$[CD]$ é uma corda de circunferência, paralela a $[AB]$, de comprimento igual a $\overline{AO}$ e $\dot{C}E$ é tangente à circunferência no ponto C.
Sabendo que $\overline{AO} = \overline{CD} = 4\ cm$, indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

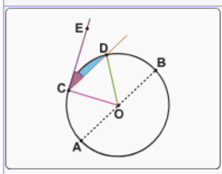
Gerador de Resposta

A amplitude do arco AC é $\frac{180^\circ}{3}$.	☑
$\angle DCE$ é um ângulo agudo.	☑
$E\hat{C}D = 45^\circ$.	☐
O comprimento do arco AD é $\frac{4}{3}\pi\ cm$.	☐

Figura 3.44: Concretização 3

Concretização 4:

Gerador de Questão



Considera a circunferência de centro O e diâmetro $[AB]$.
$[CD]$ é uma corda de circunferência, paralela a $[AB]$, de comprimento igual a $\overline{AO}$ e $\dot{C}E$ é tangente à circunferência no ponto C.
Sabendo que $\overline{AO} = \overline{CD} = 8\ cm$, indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

Gerador de Resposta

A amplitude do arco CD é 70°.	☐
$\angle DCE$ é um ângulo reto.	☐
$E\hat{C}D = 60^\circ$.	☐
O comprimento do arco AD é $\frac{8}{3}\pi\ cm$.	☐

Figura 3.45: Concretização 4

Observando as concretizações anteriores, verifica-se que, entre outras coisas, o número de respostas verdadeiras ou falsas varia. Desta forma, o aluno nunca sabe o número de respostas verdadeiras ou falsas, conduzindo-o a uma maior concentração e aplicação na resolução do exercício.

Em anexo apresentam-se os restantes exercícios desenvolvidos para este projeto.

CAPÍTULO 4

Utilização de uma Plataforma de Ensino Assistido no ensino da matemática no 3.º ciclo

O uso da tecnologia é cada vez mais frequente na sala de aula. Dos vídeos aos testes interativos, a diversificação das práticas letivas tem sido uma constante. O uso da internet para fins educacionais permite uma maior utilização de plataformas e ferramentas de ensino, as quais estão à disposição de todos.

Neste sentido, e com o intuito de combater o insucesso surgiram as plataformas de ensino assistido (PEA). Estas plataformas são um instrumento de apoio à aprendizagem, ao ensino e à avaliação através da internet. A execução de provas interativas construídas através dos recursos digitais disponíveis, podem permitir uma aprendizagem pela descoberta, que não é o caso do PmatE.

A Universidade de Aveiro e os seus investigadores foram pioneiros na construção deste tipo de plataformas. No final dos anos oitenta, princípio dos anos noventa, o Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desenvolveu aquela que seria uma das primeiras plataformas de ensino assistido em Portugal, o PmatE, *cuja missão é a aplicação das tecnologias da comunicação e informação (TIC) e o desenvolvimento de conteúdos e eventos para a promoção do sucesso escolar e da cultura científica.* ([15]) ([16])

Com o decorrer dos anos, as valências da PEA têm vindo a crescer. A PEA do PmatE *é um sistema de informação modular, disponível pela internet, que congrega duas valências, uma dedicada ao ensino e à aprendizagem e outra à gestão escolar.* ([17])

Como primeiro objetivo de aumentar e incutir gosto pela Matemática, o PmatE foi construído apenas direcionado para esta disciplina. Mas com o decorrer dos anos, o seu nível de atuação estendeu-se a outras áreas disciplinares, nomeadamente Português, Biologia, Geologia, Física, Literacia Financeira, Química e Inglês.

A PEA *é um sistema de informação desenvolvido pelo PmatE que visa otimizar o processo de ensino/aprendizagem. Apresenta-se como um espaço inovador e atrativo que oferece um conjunto de potencialidades com o objetivo final de cativar e auxiliar os interlocutores, promovendo o gosto e o sucesso nas diferentes áreas científicas.* ([18])

O PmatE tem sido ao longo dos anos reconhecido, tanto a nível nacional como a nível internacional, como uma ferramenta importante na motivação dos alunos para a aprendizagem em diferentes áreas científicas, e mais concretamente na Matemática. ([19], [20])

Esta ferramenta de apoio ao estudo permite a troca e partilha de recursos, possibilitando momentos de avaliação, aprendizagem e ensino de forma mais cativante e inovadora.

A compilação de temas e conteúdos de aprendizagem é feita através dos modelos geradores de questões. Estes modelos geram, aleatoriamente, questões parametrizadas do tipo verdadeiro ou falso, tendo para cada alínea várias possibilidades de resposta. Com este tipo de *software* é possível criar diferentes tipos de testes e provas, nomeadamente: testes de avaliação diagnóstica, os quais podem ser aplicados no início do ano letivo ou no início de cada novo capítulo, como forma de diagnosticar as dificuldades de cada aluno; provas de treino, com o intuito de consolidar as aprendizagens adquiridas e correção dos erros; e testes de avaliação sumativa, com o objetivo de avaliar os conteúdos apreendidos. Estes modelos são criados através do programa *ModelMaker, a mais recente solução desenvolvida pelo PmatE, que permite aos utilizadores, sem conhecimentos de programação e de uma forma autónoma, construir e disponibilizar Modelos Geradores de Questões.* ([18])([21], [22])

A utilização do PmatE no ensino da Matemática tem dado os seus frutos. Os campeonatos nacionais assim o demonstram.

As Competições Nacionais de Ciência (CNC) são constituídas por um conjunto de doze competições, nas áreas de matemática, biologia, geociências, física, química, português, inglês e literacia financeira, destinadas a jovens do 1º Ciclo do Ensino Básico ao Ensino Secundário.

As CNC não se tratam apenas de três dias de provas, mas de um trabalho contínuo entre professores e alunos e que culmina na realização das CNC. Na realidade, estas competições iniciam-se com a disponibilização dos treinos, a partir da plataforma online e, depois materializam-se em dois eventos nacionais, um em Rede que se realiza em fevereiro/março e para culminar todo este processo, as CNC na Universidade de Aveiro, em maio. ([23])

Em 2017, e segundo o relatório das Competições Nacionais de Ciência (CNC), nas diversas provas de Matemática participaram 7646 alunos de 255 escolas na CNC – Em rede, e 6856 alunos de 543 escolas na CNC na Universidade de Aveiro. No decorrer deste ano letivo, estiveram ainda envolvidos 1016 professores.

A competitividade, bem como a correção imediata dos exercícios motiva os alunos para a aprendizagem, pois permite-lhes um maior envolvimento no seu processo de ensino/aprendizagem, visto que possibilita um conhecimento quase imediato das aprendizagens adquiridas.

Na tentativa de melhorar cada vez mais as suas pontuações, o aluno, ao seu ritmo, repete as provas e consolida as suas aprendizagens de forma autónoma, quer na sala de aula quer em casa.

A utilização das PEA no ensino da Matemática pode ser uma mais-valia para o aumento do sucesso da Matemática. Como complemento à aula e ao manual, o PmatE pode ser uma ferramenta de ajuda quer para professores quer para alunos.

CAPÍTULO 5

Análise dos resultados

5.1 Caracterização do agrupamento de escolas

No ano letivo 2016/2017 estive a lecionar no Agrupamento de escolas de Lousada, mais propriamente na Escola Básica de Lousada Centro. Este agrupamento situa-se muito perto do centro da vila de Lousada, sede de concelho, e é formado por uma escola secundária com 3.º ciclo (escola sede), uma escola básica com 2.º e 3.º ciclo e cinco escolas básicas de 1.º ciclo e jardim de infância.

A Escola Básica de Lousada Centro foi construída em 1981 e durante muitos anos esteve sempre sobrelotada. No entanto, devido a diversos fatores, nomeadamente o decréscimo da natalidade e/ou a emigração, levaram a que o número de alunos diminuísse consideravelmente.

No ano letivo transato a Escola Básica tinha 477 alunos inscritos, dos quais 135 eram do 3.º ciclo. O número reduzido de alunos no 3.º ciclo prende-se com diversos fatores, nomeadamente, o facto de os discentes preferirem inscrever-se na Escola Secundária, visto que esta, em 2011, sofreu obras de remodelação pelo Parque Escolar, enquanto a Escola Básica está um pouco degradada e a aguardar obras, e o facto de no concelho de Lousada existirem mais três escolas básicas de 2.º e 3.º ciclo.

O nível socioeconómico dos alunos não é muito alto, pois mais de 50% dos alunos do 2.º e 3.º ciclo são apoiados pela Ação Social Escolar (ASE). A maioria dos pais dos alunos trabalha no setor industrial nos concelhos vizinhos ou na agricultura. Verifica-se também um elevado número de pais desempregados e com carências económicas e sociais. Alguns alunos beneficiam também de suplementos alimentares na escola, tais como lanches de manhã e de tarde.

Perante esta realidade, muitos alunos têm poucas expectativas relativamente ao seu futuro, o que se traduz no seu rendimento escolar.

5.2 CARACTERIZAÇÃO DA TURMA

A turma B do 9.º ano de escolaridade da Escola Básica de Lousada Centro foi a turma por mim escolhida para a realização deste estudo. As razões da minha escolha foram essencialmente duas: o facto de terem sido meus alunos no ano letivo anterior que permitiu já um conhecimento das suas capacidades e/ou dificuldades, bem como sabia que eles eram muito competitivos entre si no que aos resultados dizia respeito.

Era uma turma constituída por 21 alunos, 9 raparigas e 12 rapazes (Figura 5.1), com idades compreendidas entre os 13 e os 16 anos (Figura 5.2). Na sua constituição estava um aluno abrangido pelo decreto-lei 3/2008, que beneficiava de adequações curriculares às diferentes disciplinas, uma aluna com dislexia e um aluno que estava a repetir o 9.º ano. De salientar que, neste grupo de alunos, apenas 5 beneficiavam de Ação Social Escolar, o que, tendo em conta a realidade na escola, é um número reduzido.

Figura 5.1: Número dos alunos

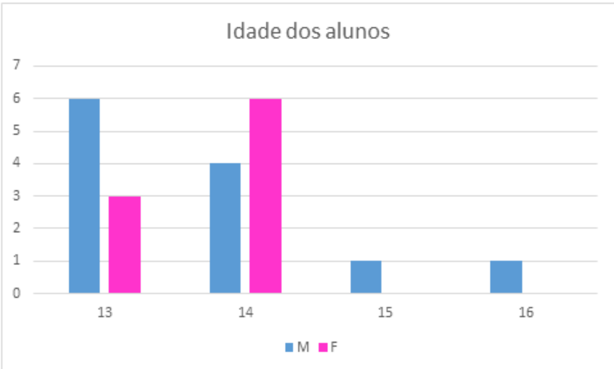


Figura 5.2: Idade dos alunos

Em termos de aproveitamento, era uma turma muito heterogénea, pois tinha um grupo de alunos com muito bom rendimento escolar e um grupo de alunos que apresentavam muitas dificuldades, nomeadamente à disciplina de Matemática.

No final do ano letivo 2016/2017, doze discentes foram aprovados sem nenhum nível inferior a três, cinco dos quais foram propostos para o Quadro de excelência do agrupamento, por possuírem uma média final de ano de pelo menos 4,5. Relativamente à disciplina de Matemática, no final do 3.º período, 9 alunos obtiveram nível dois, 1 aluno obteve nível três, 7 alunos obtiveram nível quatro e 4 alunos obtiveram nível cinco (Figura 5.3). De salientar que, 14 dos vinte e um alunos pretende prosseguir estudos e tirar um curso superior (Figura 5.4).

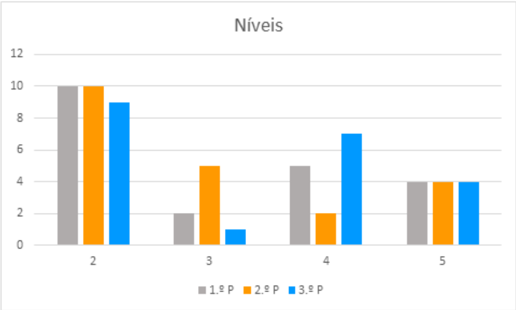


Figura 5.3: Níveis

Figura 5.4: Quero estudar até ...

Apesar do seu bom aproveitamento, alguns alunos demonstravam falta de atenção/concentração nas aulas, dificuldades na relacionação de conteúdos, dificuldades na compreensão oral e escrita, bem como no pensamento lógico/abstrato e no raciocínio matemático.

5.3 TRABALHO DESENVOLVIDO

No início do ano letivo, falei com a Direção da escola, a Diretora de Turma e os Encarregados de Educação para expor o meu projeto e pedir autorização para o implementar ao longo do ano. Obtive resposta afirmativa de todos os intervenientes para realizar o trabalho.

Primitivamente, e após inscrever os alunos na plataforma PmatE, criei provas de treino para a familiarização com o programa, visto que nenhum dos envolvidos conhecia a plataforma.

Posteriormente, criei provas de avaliação para que os alunos utilizassem a plataforma como uma ferramenta de estudo, em vez de utilizarem apenas o manual. Gerei provas de todos os domínios lecionados no 9.º ano de escolaridade, nos quais os alunos pudessem verificar e identificar as suas aprendizagens.

Para testar os conhecimentos, e utilizando os modelos existentes no PmatE, elaborei questões-aula em papel, na tentativa de mostrar aos alunos que a utilização da plataforma é uma estratégia de estudo.

No entanto, ao longo do ano deparei-me com algumas dificuldades na implementação deste projeto. A incompatibilidade de horário na sala de informática, a não existência de internet na escola durante alguns períodos do dia, a falta de empenho dos alunos na realização das provas, condicionaram a execução deste projeto.

Apesar dos contratempos mencionados, foi alcançado um total de 725 acessos efetuados pelos 21 alunos da turma. Nos subdomínios em que foi possível realizar mais do que uma prova, denota-se uma melhoria nos resultados da primeira para a segunda prova, com exceção do subdomínio Trigonometria. Esta situação deve-se ao espaço temporal entre a lecionação deste tema e a concretização desta prova, visto que esta foi realizada em Junho, como revisão para a prova final de ciclo, e o subdomínio ter sido lecionado no início do mês de Fevereiro.

Prova	Domínio	N.º de Provas Entregues	Total	Acertou	%	Errou	%	Não respondeu	%
Equações	Álgebra	84	1680	988	58,81	686	40,83	6	0,36
Probabilidades 1	Organização e	97	740	435	58,78	305	41,22	0	0
Probabilidades 2	tratamento de dados	77	1540	1023	66,43	508	32,99	9	0,58
Áreas e volumes	Geometria	108	2592	1400	54,01	1124	43,36	68	2,62
Funções	Álgebra	96	1152	696	60,42	439	38,11	17	1,48
	Generalidade sobre funções		1536	1012	65,89	506	32,94	18	1,17
Trigonometria Fevereiro	Trigonometria e	16	256	190	74,22	61	23,83	5	1,95
Trigonometria	Funções Trigonométricas	59	1180	588	49,83	577	48,90	15	1,27
Inequações	Números e operações	188	1504	858	57,05	615	40,89	31	2,06
	Álgebra		2256	1262	55,94	951	42,15	43	1,91

Tabela 5.1: Informação das provas realizadas

Relativamente aos dados apresentados na tabela 5.1, por exemplo, a prova Equações apenas avaliava o domínio *Álgebra*. Esta prova era constituída por cinco perguntas, cada uma com quatro afirmações, às quais os alunos tinham de atribuir um dos valores "Verdadeiro"ou "Falso". Neste sentido foram dadas 1680 respostas, distribuídas por 84 provas realizadas. Os alunos acertaram em 988 respostas, erraram 686 e não responderam a 6 alíneas.

Observando a tabela 5.1, pode-se verificar também que os domínios em que os alunos apresentaram mais dificuldades foram *Álgebra*, *Geometria* e *Números e Operações*.

CAPÍTULO 6

Conclusão e trabalho futuro

A Escola tem vindo a sofrer muitas transformações. E as principais renovações têm como ponto central os alunos. Desde a modificação dos programas das disciplinas à alteração da escolaridade obrigatória, tudo tem contribuído para essas mudanças. Para além disso, os interesses e os gostos dos alunos têm-se alterado de forma significativa.

É neste sentido que as práticas letivas estão a modificar-se. A forma de ensinar e as ferramentas utilizadas na aprendizagem são exemplos destas renovações. Cada vez mais, a Escola tem de criar mecanismos para motivar os alunos para a aprendizagem e para o sucesso.

E eu, como professora tenho vindo ao longo dos anos, tentando adequar as minhas práticas letivas à realidade e aos interesses dos meus alunos, de forma a conseguir alcançar os melhores resultados possíveis.

Este foi um dos motivos que me levou a realizar este trabalho e a escolher este tema. Quando pensei em prosseguir estudos e alcançar o grau de mestre, tinha sempre como objetivo um tema que me ajudasse a melhorar os meus conhecimentos e me permitisse incluí-los nas minhas aulas como forma de melhorar as minhas práticas letivas.

A construção e utilização de recursos digitais como forma de complemento aos manuais escolares, que foi o objetivo principal deste trabalho, pode ser uma mais-valia para todo o processo de ensino/aprendizagem. O uso das novas tecnologias, nomeadamente das plataformas de ensino assistido, como um instrumento de avaliação de conhecimentos ou como consolidação de saberes, pode ser um caminho importante para a obtenção de sucesso escolar.

No entanto, para que tudo funcione, é necessário que as escolas estejam preparadas para a alteração de algumas práticas letivas, nomeadamente, a inclusão de ferramentas de ensino com recurso às novas tecnologias, as PEA. E, para já, muitas das escolas ainda não têm meios suficientes para a implementação de projetos deste género. A falta de equipamento informático, a deficiente rede de internet, a incompatibilidade de horário da sala de informática, são disso exemplo.

E, no decorrer deste ano letivo, senti todas estas dificuldades na realização deste trabalho. De salientar, que sempre tive todo o apoio e ajuda possível da Direção da escola, bem como dos auxiliares de ação educativa e dos meus colegas para que tudo decorresse da melhor maneira possível.

Para além disso, os programas extensos das disciplinas também não permitem que, em contexto de sala de aula, se possa utilizar as PEA de forma sistemática, pois o tempo é escasso.

Paralelamente a tudo isto, os alunos também não demonstraram empenho suficiente na realização das tarefas que lhes foram propostas, quer em número de treinos realizados, quer na atenção/concentração na resolução dos exercícios.

Outro dos obstáculos com que me deparei foi o facto de nunca ter trabalho com o programa *ModelMaker*, o qual utilizei para elaborar os exercícios parametrizados, assim como, com o programa *LaTeX* e o código *Python* utilizado na parametrização de exercícios nos modelos geradores de questões.

No entanto, e apesar de todos os contratempos, esta experiência foi muito enriquecedora quer a nível pessoal quer a nível profissional. Todos os conhecimentos que advêm da realização deste projeto vão ser muito úteis no meu futuro. Espero conseguir implementá-los ao longo do meu percurso profissional, melhorando os aspetos que não correram tão bem.

Os exercícios realizados no âmbito deste projeto vão ser disponibilizados na plataforma PmatE, para que todos os utilizadores desta plataforma possam utilizá-los nas suas práticas letivas.

Espero, como professora, conseguir sempre motivar os meus alunos para a aprendizagem da Matemática desmistificando a fama desta disciplina, colocando em prática o que aprendi com este trabalho.

Referências

[1] *Dicionário Infopédia da Língua Portuguesa com Acordo Ortográfico.* URL: https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/gamificaÃğÃčo.

[2] M. E. Ford. *Motivation humans: Goals, emotions and personal agency beliefs.* Newberry Park, CA: Sage, 1992.

[3] W. Hsin-Yuan Huang e D. Soman. *A Practitioner's Guide to Gamification of Education.* 2013.

[4] A. Tapia. *Motivar para el aprendizagem. Teoria y estrategias.* Barcelona: Edebé, 1997.

[5] Ministério da Educação. *Programa de Matemática para o Ensino Básico.* 2013.

[6] Ministério da Educação. *Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico.* 2013.

[7] J. P. da Ponte e P. Abrantes E.Veloso H. Fonseca. *Ensino da Geometria ao virar do Milénio.* Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1999.

[8] B. Costa e E. Rodrigues. *Novo Espaço 9.* Vol. 2. Porto Editora, 2015.

[9] M. A. F. Neves e A. Silva. *Matemática 9.º ano.* Vol. 2. Porto Editora, 2015.

[10] I. Passos e O. Correia B. Thudichum. *Matemática em Ação 9.* Vol. 2. Porto Editora, 2015.

[11] F. Fidalgo e P. Louçano F. Magro. *Pi 9.* Vol. 2. Edições Asa, 2015.

[12] O. Dolce e J. Pompeo. *Fundamentos de Matemática Elementar 9. Geometria Plana.* 7.ª edição. Atual Editora (S. Paulo-Brasil), 1997.

[13] D. Pescu e R. Arnaut. *Geometria Básica.* 2.ª edição. Fundação CECIERJ (Rio de Janeirol), 2010.

[14] P. Ventura Araújo. *Curso de Geometria.* 4.ª edição. Gradiva Publicações, 2012.

[15] PmatE. *Pmate.* URL: http://pmate.ua.pt/oficial/.

[16] «Plataforma de ensino assistido PEA». Em: *Factus* (2011). Ed. por Universidade de Aveiro.

[17] PmatE. *PEA.* URL: http://pmate.ua.pt/pea.

[18] Alexandre Silva e Jorge Mariño. *PmatE e ferramentas web para o desenvolvimento de recursos de aprendizagem.* 2015. URL: http://mateas.wikidot.com/thread:pmate.

[19] «PmatE, um projeto que marca a educação em Portugal, e não só!» Em: *Factus* (2012). Ed. por Universidade de Aveiro.

[20] «Projeto PmatE distinguido como exemplo de boas práticas na Europa». Em: *Factus* (2012). Ed. por Universidade de Aveiro.

[21] «Modelos geradores de questões: Conteúdos inovadores do Ensino Básico ao Ensino Superior». Em: *Factus* 1.ª edição (2011). Ed. por Universidade de Aveiro.

[22] «Conteúdos do PmatE reúnem o melhor de três mundos: o desktop, a web e o mobile». Em: *Factus* (2012). Ed. por Universidade de Aveiro.

[23] PmatE. *Competições nacionais de Ciência: relatório de atividades Competições nacionais de Ciência '17*.

Anexos

De seguida apresentam-se os restantes exercícios desenvolvidos ao longo da execução deste trabalho.

Exercício 1:

Neste exercício, na figura estão representados ângulos ao centro e uma reta tangente à circunferência no ponto A.

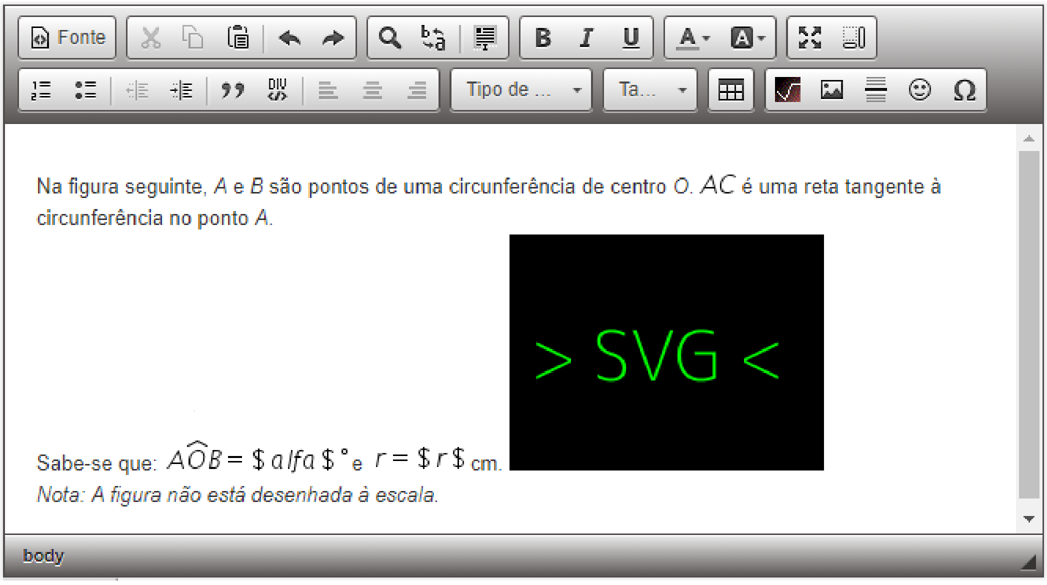


Figura A.1: Enunciado

Para este exercício, inicialmente foram definidos dois parâmetros, α e r. α é um número inteiro pertencente ao intervalo $[25, 80]$ e r é um número inteiro pertencente ao intervalo $[2, 20]$.

Foram construídas quatro imagens para este exercício, tendo por base os valores de α e de acordo com os seguintes intervalos $[25, 40[$, $[40, 55[$, $[55, 70[$ e $[70, 80]$.

Seguidamente enunciaram-se as respostas, igualmente parametrizadas:

Resposta 1:

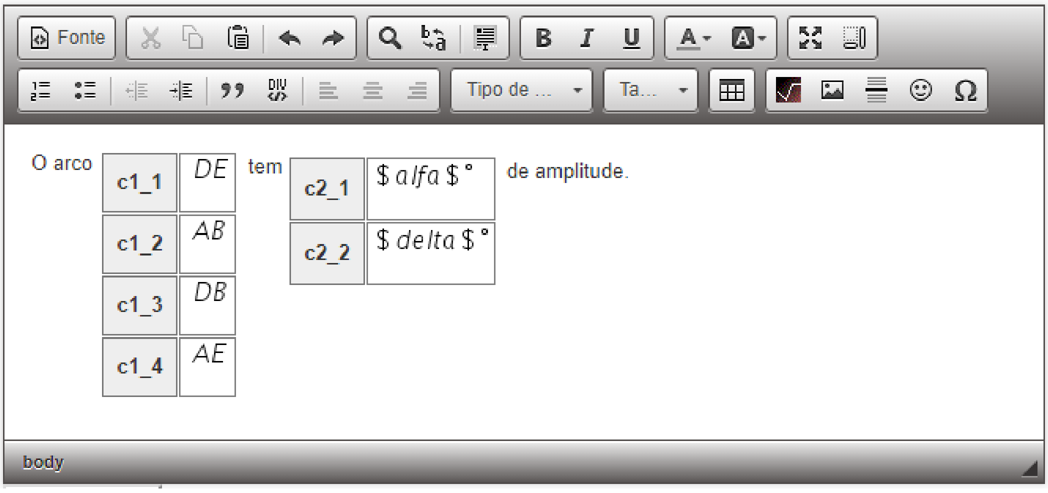


Figura A.2: Resposta 1

Para a elaboração desta resposta foi necessário parametrizar uma nova variável δ, sendo $\delta = 180° - \alpha$.

Validação:

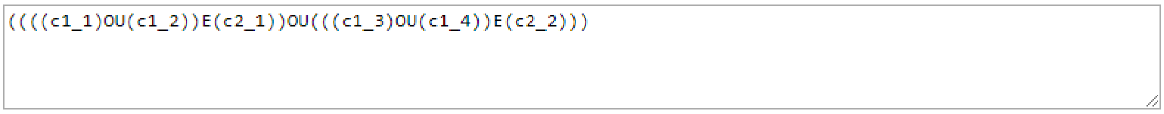


Figura A.3: Validação da resposta 1

Resposta 2:

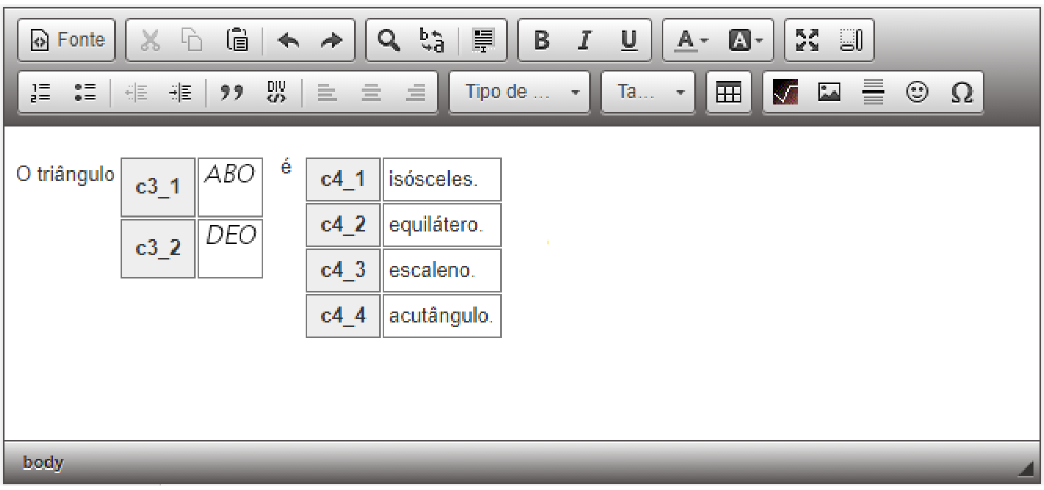


Figura A.4: Resposta 2

Validação:

```
((c4_1)OU((c4_2)E($alfa$="60"))OU(c4_4))
```

Figura A.5: Validação da resposta 2

Resposta 3:

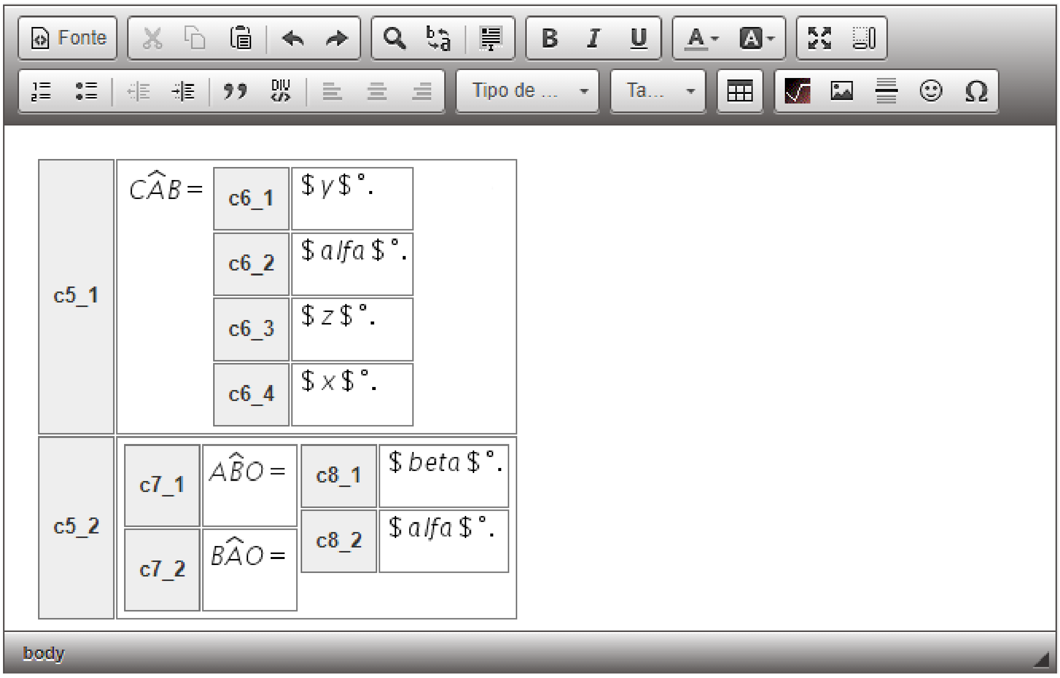


Figura A.6: Resposta 3

Neste exercício foram definidas novas variáveis β, x, y e z, sendo $\beta = \frac{180°-\alpha}{2}$, $x = 90° - \beta$, $y = \frac{\alpha}{2}$ e $z = 2\alpha$.

Validação:

```
((c6_1)OU(c6_4))OU((c8_1)OU((c8_2)E($alfa$="60")))
```

Figura A.7: Validação da resposta 3

Resposta 4:

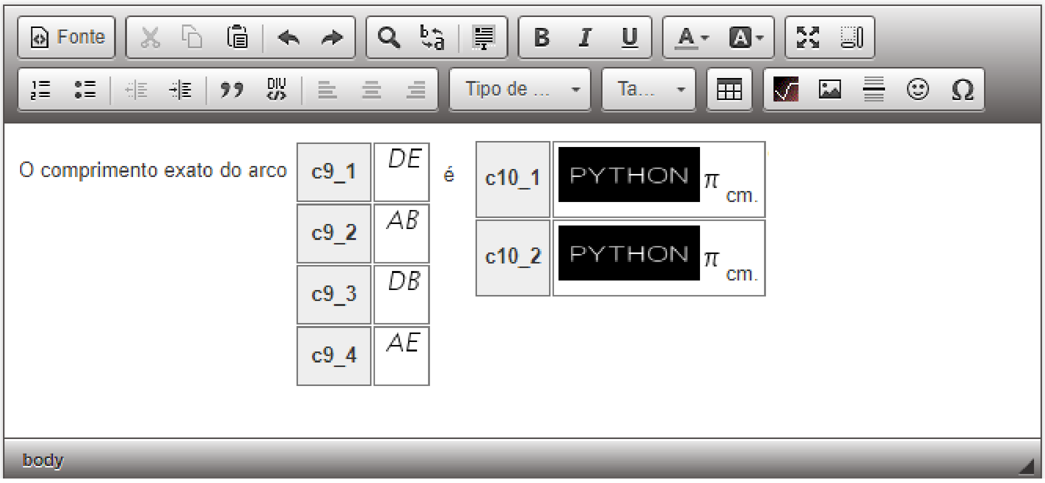


Figura A.8: Resposta 4

Nesta resposta foi necessário definir novas variáveis, às quais tive de aplicar código *Python*, para que na concretização do exercício aparecesse o valor exato. As variáveis estavam definidas como $\frac{\alpha \times r}{180^o}$ e $\frac{\delta \times r}{180^o}$.

Validação:

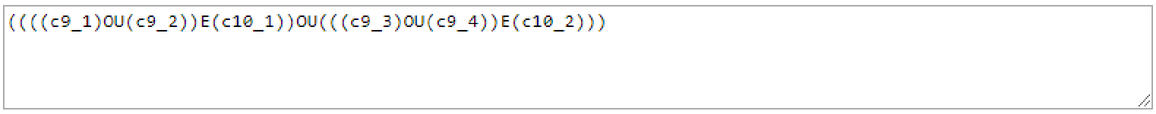
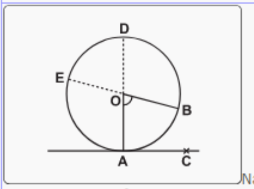


Figura A.9: Validação da resposta 4

De seguida são apresentadas quatro concretizações do mesmo exercício. De salientar que as afirmações verdadeiras estão assinaladas com ✓.

Concretização 1:

Gerador de Questão



Na figura seguinte, *A* e *B* são pontos de uma circunferência de centro *O*. AC é uma reta tangente à circunferência no ponto *A*.
Sabe-se que: $A\hat{O}B = 71^{\circ}$ e $r = 12$ cm.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

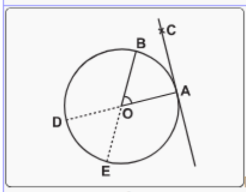
Gerador de Resposta

O arco AB tem 71° de amplitude.	☑
O triângulo DEO é isósceles.	☑
$B\hat{A}O = 54{,}50^{\circ}$.	☑
O comprimento exato do arco AB é $\frac{71}{15}\pi$ cm.	☑

Figura A.10: Concretização 1

Concretização 2:

Gerador de Questão



Na figura seguinte, *A* e *B* são pontos de uma circunferência de centro *O*. AC é uma reta tangente à circunferência no ponto *A*.
Sabe-se que: $A\hat{O}B = 68^{\circ}$ e $r = 5$ cm.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

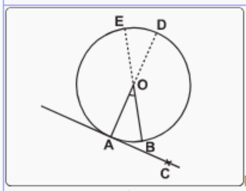
Gerador de Resposta

O arco DE tem 112° de amplitude.	☐
O triângulo DEO é escaleno.	☐
$A\hat{B}O = 68^{\circ}$.	☐
O comprimento exato do arco DE é $\frac{17}{9}\pi$ cm.	☑

Figura A.11: Concretização 2

Concretização 3:

Gerador de Questão



Na figura seguinte, *A* e *B* são pontos de uma circunferência de centro *O*. AC é uma reta tangente à circunferência no ponto *A*.

Sabe-se que: $A\hat{O}B = 39^\circ$ e $r = 13$ cm.

Nota: A figura não está desenhada à escala.

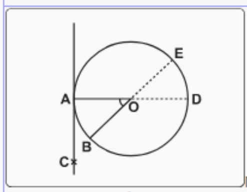
Gerador de Resposta

O arco DB tem 39° de amplitude.	☐
O triângulo DEO é equilátero.	☐
$C\hat{A}B = 39^\circ$.	☐
O comprimento exato do arco DB é $\frac{169}{60}\pi$ cm.	☐

Figura A.12: Concretização 3

Concretização 4:

Gerador de Questão



Na figura seguinte, *A* e *B* são pontos de uma circunferência de centro *O*. AC é uma reta tangente à circunferência no ponto *A*.

Sabe-se que: $A\hat{O}B = 51^\circ$ e $r = 18$ cm.

Nota: A figura não está desenhada à escala.

Gerador de Resposta

O arco AE tem 129° de amplitude.	☑
O triângulo ABO é isósceles.	☑
$B\hat{A}O = 51^\circ$.	☐
O comprimento exato do arco AB é $\frac{51}{10}\pi$ cm.	☑

Figura A.13: Concretização 4

Exercício 2:

Neste exercício foram parametrizadas as variáveis α, β e δ. α e β são números inteiros definidas nos intervalos $[30, 40]$ e $[50, 60]$, respetivamente. δ é uma função, tal que $\delta = \beta - \alpha$.

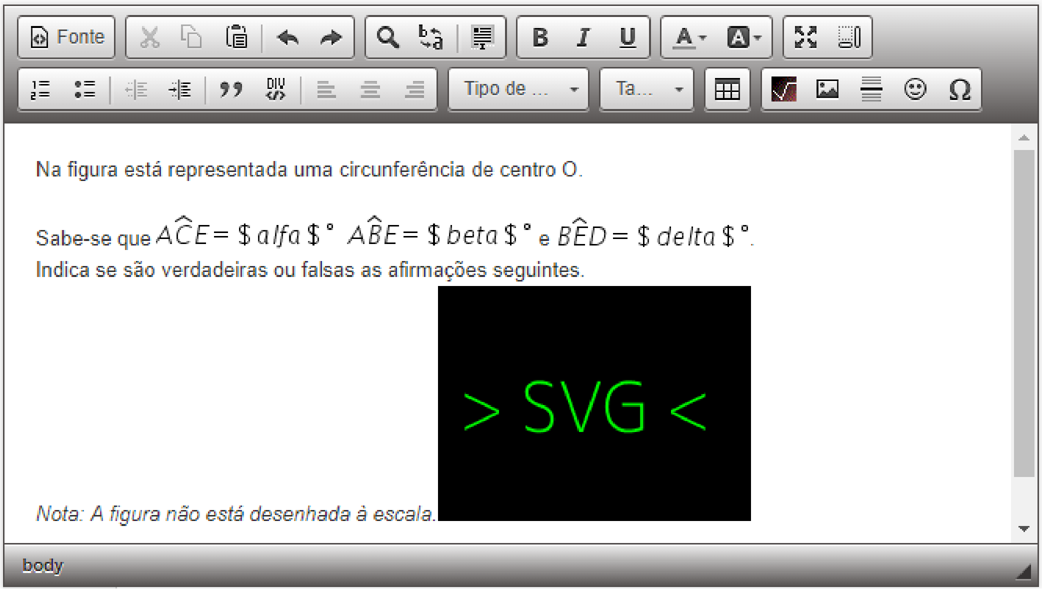


Figura A.14: Enunciado

Resposta 1:

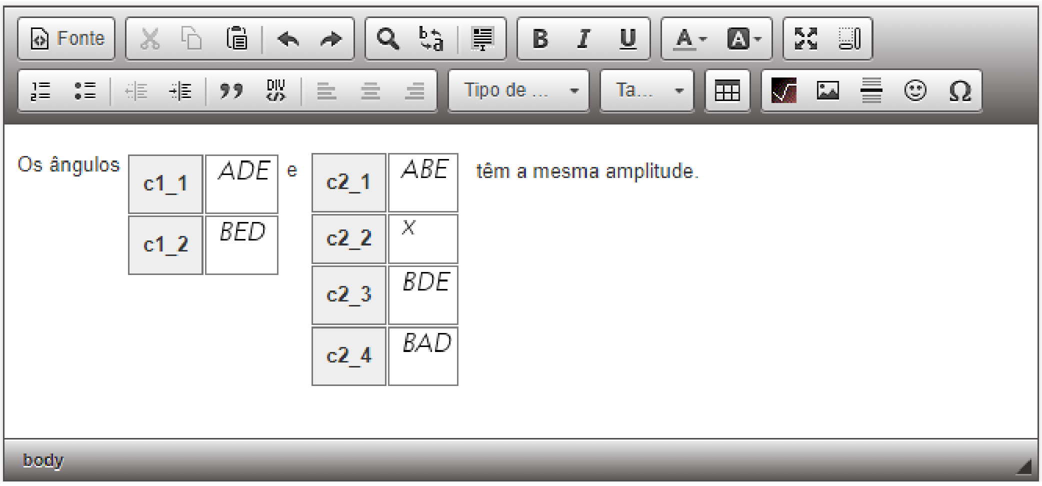


Figura A.15: Resposta 1

Validação:

Figura A.16: Validação da resposta 1

Resposta 2:

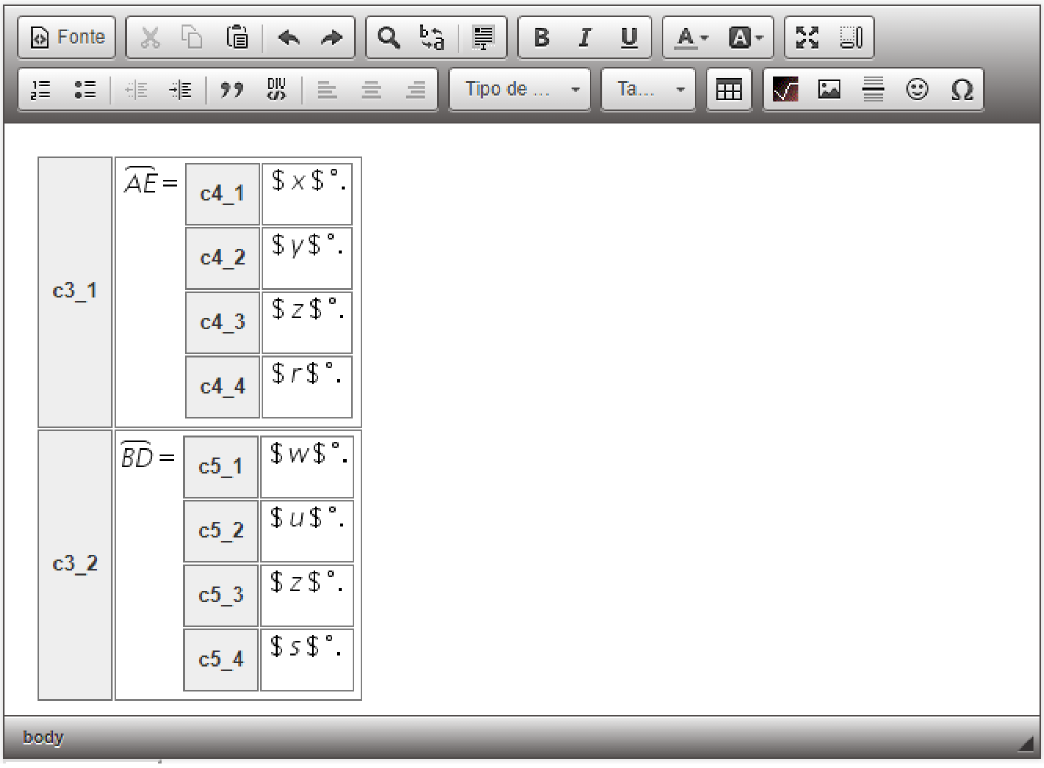


Figura A.17: Resposta 2

Para a elaboração desta resposta foi necessário definir novas variáveis, sendo $x = 2\beta$, $y = \frac{\beta}{2}$, $z = 2\alpha$, $w = 2\delta$ e $u = \frac{\delta}{2}$, $r = 2\alpha + 2\delta$ e $s = 2\beta - 2\alpha$.

Validação:

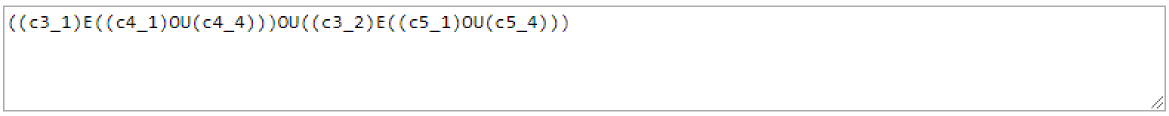


Figura A.18: Validação da resposta 2

Resposta 3:

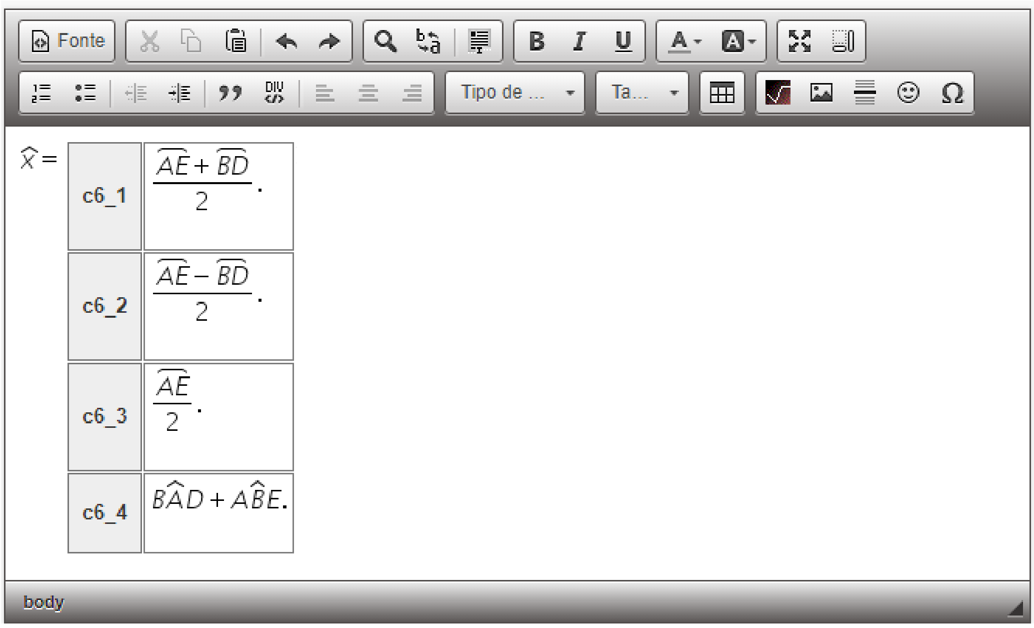
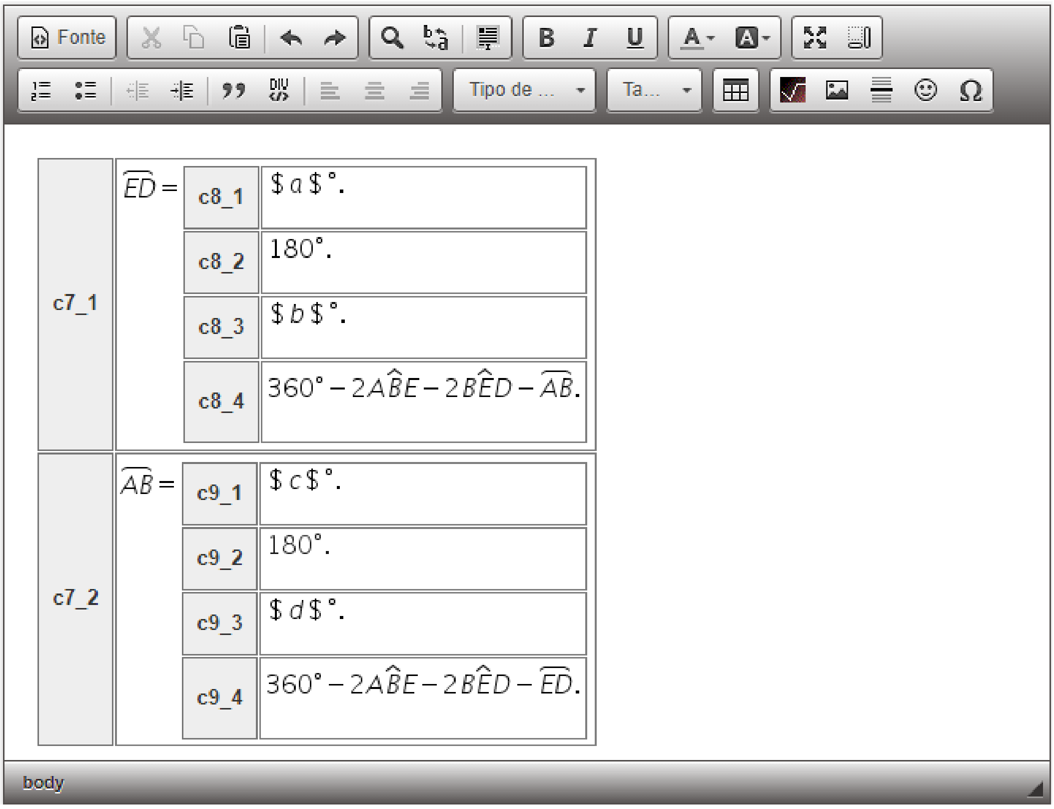


Figura A.19: Resposta 3

Validação:

Figura A.20: Validação da resposta 3

Resposta 4:

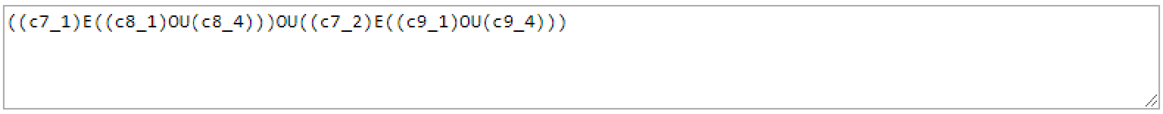


c7_1	$\overset{\frown}{ED}=$	c8_1	\$ a \$°.
		c8_2	180°.
		c8_3	\$ b \$°.
		c8_4	$360° - 2A\hat{B}E - 2B\hat{E}D - \overset{\frown}{AB}$.
c7_2	$\overset{\frown}{AB}=$	c9_1	\$ c \$°.
		c9_2	180°.
		c9_3	\$ d \$°.
		c9_4	$360° - 2A\hat{B}E - 2B\hat{E}D - \overset{\frown}{ED}$.

Figura A.21: Resposta 4

Na resolução desta resposta foi necessário parametrizar quatro novas variáveis, sendo $a = 180° - 2\delta$, $b = 180° - \frac{\delta}{2}$, $c = 180° - 2\beta$ e $d = 180° - \frac{\beta}{2}$.

Validação:

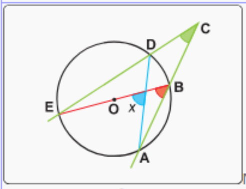


```
((c7_1)E((c8_1)OU(c8_4)))OU((c7_2)E((c9_1)OU(c9_4)))
```

Figura A.22: Validação da resposta 4

Concretização 1:

Gerador de Questão



Na figura está representada uma circunferência de centro O.
Sabe-se que $A\widehat{C}E = 39^\circ$, $A\widehat{B}E = 57^\circ$ e $B\widehat{E}D = 18^\circ$.
Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

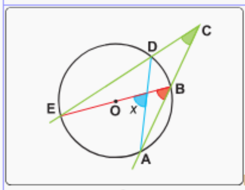
Gerador de Resposta

Os ângulos ADE e BDE têm a mesma amplitude.	☐
$\overset{\frown}{BD} = 36^\circ$.	☑
$\widehat{x} = B\widehat{A}D + A\widehat{B}E$.	☑
$\overset{\frown}{ED} = 360^\circ - 2A\widehat{B}E - 2B\widehat{E}D - \overset{\frown}{AB}$.	☑

Figura A.23: Concretização 1

Concretização 2:

Gerador de Questão



Na figura está representada uma circunferência de centro O.
Sabe-se que $A\widehat{C}E = 40^\circ$, $A\widehat{B}E = 56^\circ$ e $B\widehat{E}D = 16^\circ$.
Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.
Nota: A figura não está desenhada à escala.

Gerador de Resposta

Os ângulos BED e ABE têm a mesma amplitude.	☐
$\overset{\frown}{BD} = 32^\circ$.	☑
$\widehat{x} = \frac{\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{BD}}{2}$.	☐
$\overset{\frown}{AB} = 152{,}00^\circ$.	☐

Figura A.24: Concretização 2

Concretização 3:

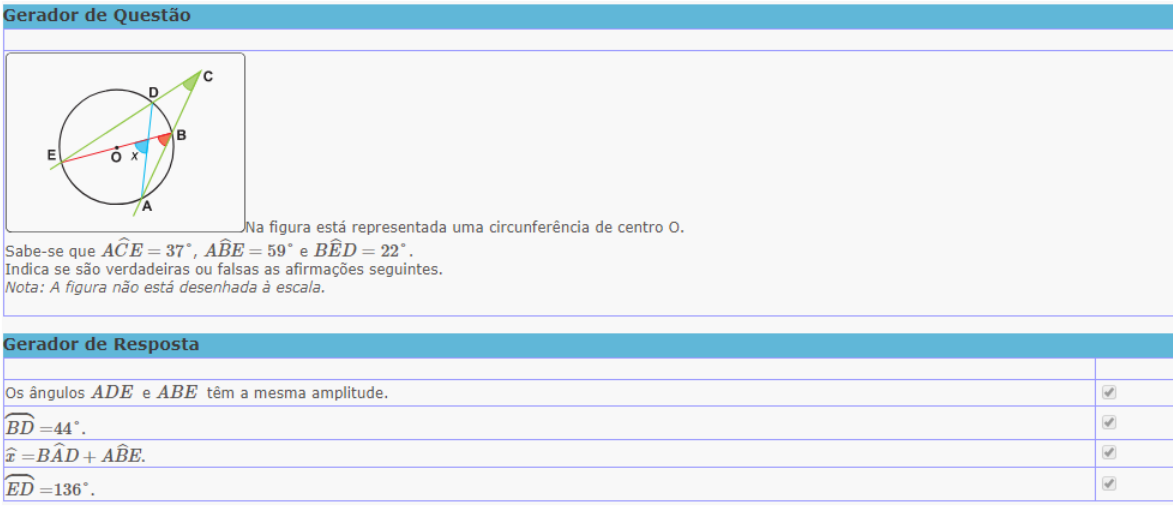


Figura A.25: Concretização 3

Exercício 3:

Neste exercício inicialmente foi parametrizada a variável α, número inteiro pertencente ao intervalo $[120, 140]$.

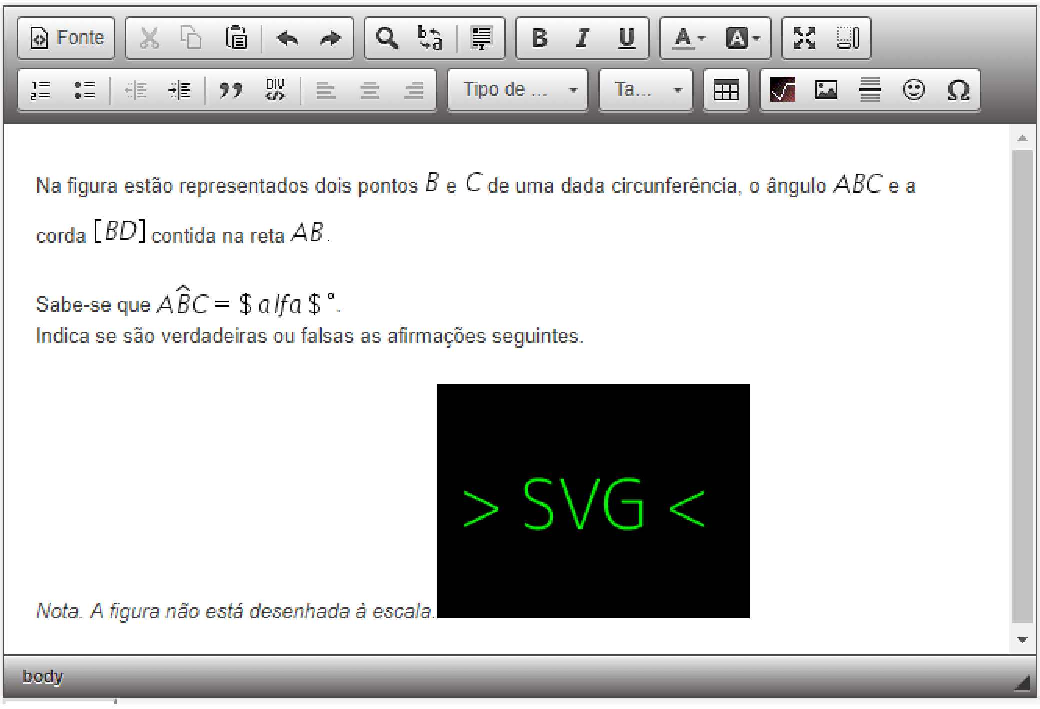


Figura A.26: Enunciado

Resposta 1:

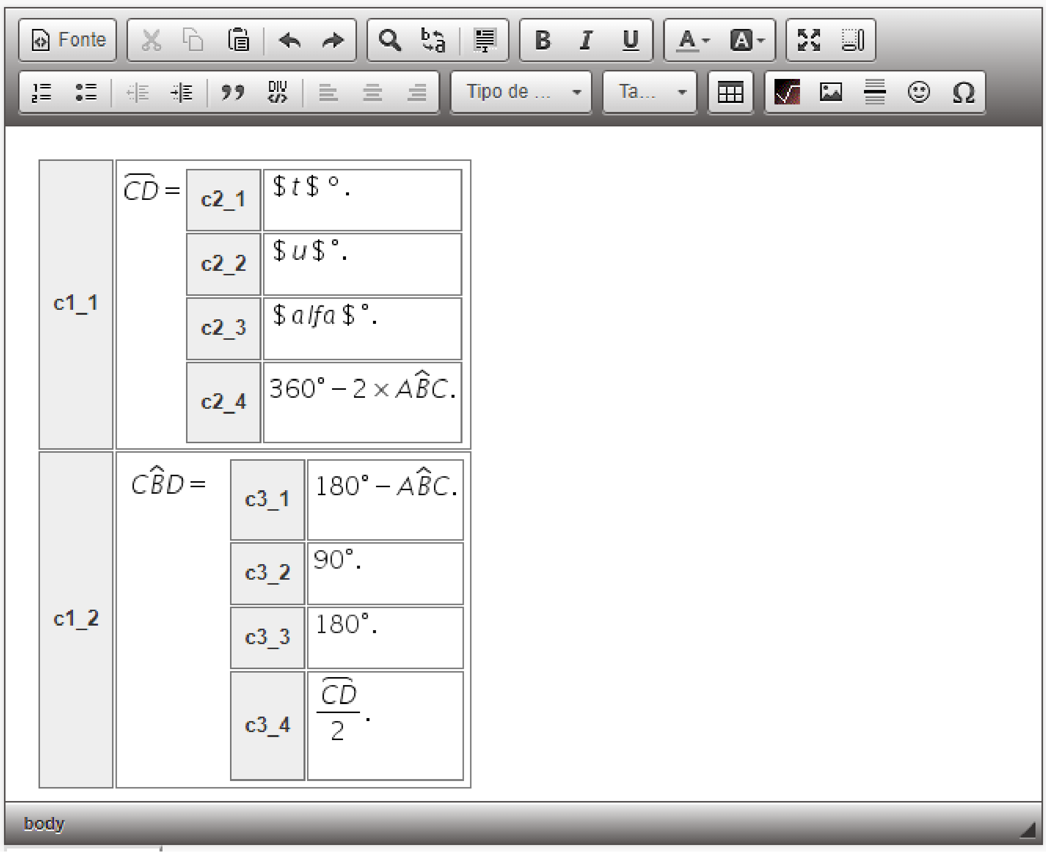


Figura A.27: Resposta 1

Para a resolução desta resposta foi necessário definir as vaiáveis t e u, sendo $t = 2(180° - \alpha)$ e $u = 180° - \alpha$.

Validação:

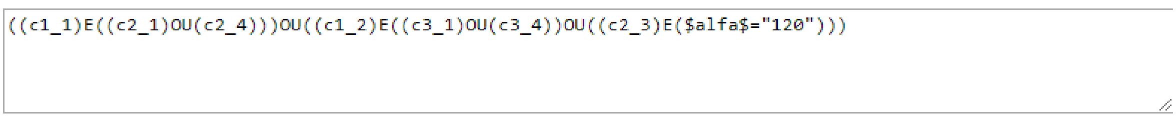


Figura A.28: Validação da resposta 1

Resposta 2:

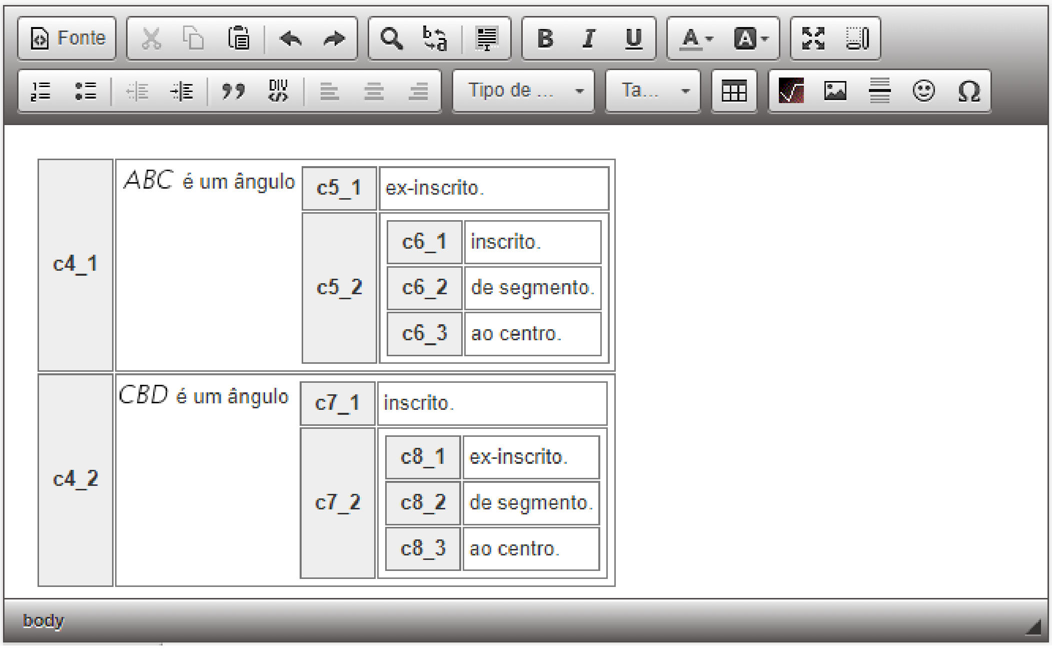


Figura A.29: Resposta 2

Validação:

Figura A.30: Validação da resposta 2

Resposta 3:

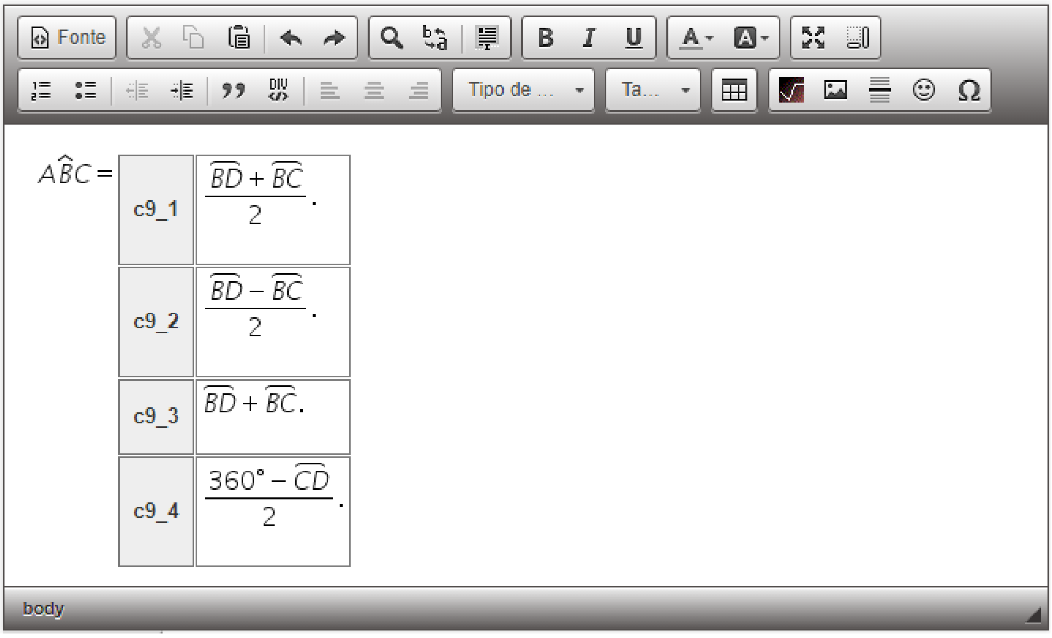


Figura A.31: Resposta 3

Validação:

Figura A.32: Validação da resposta 3

Resposta 4:

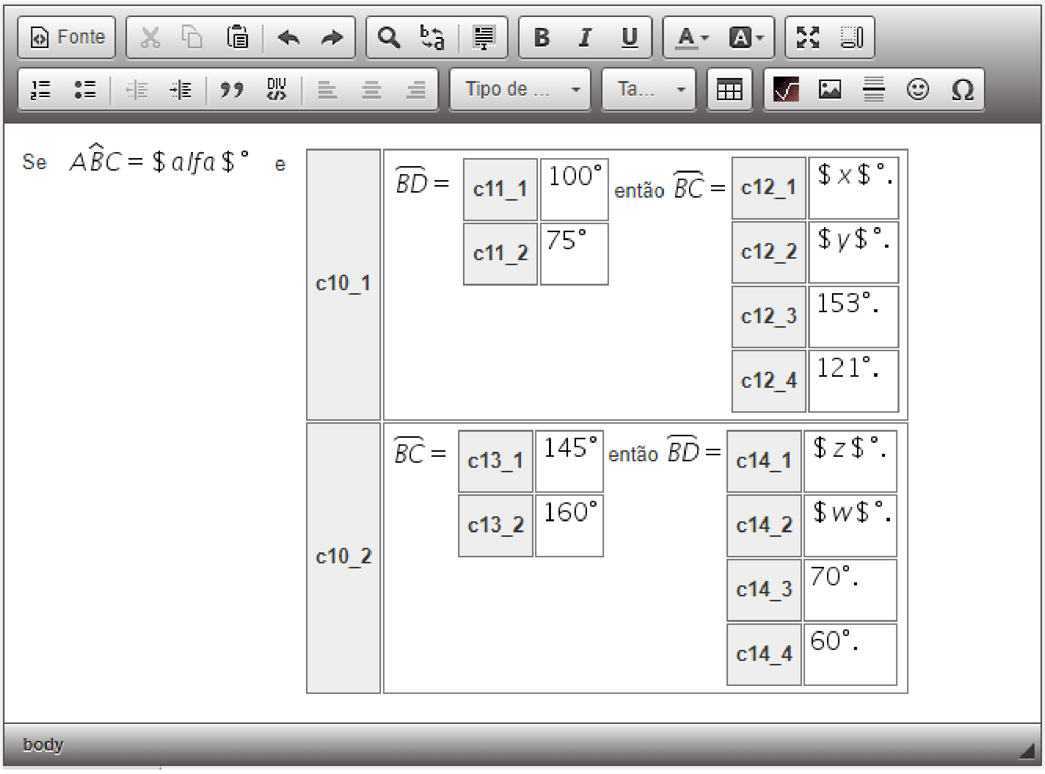


Figura A.33: Resposta 4

Para a concretização desta resposta foi necessário parametrizar novas variáveis, sendo $x = 2\alpha - 100$, $y = 2\alpha - 75$, $z = 2\alpha - 145$ e $w = 2\alpha - 160$.

Validação:

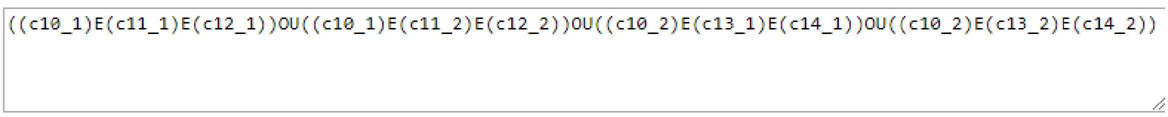
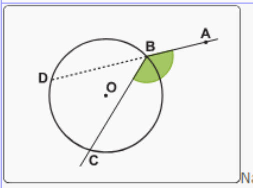


Figura A.34: Validação da resposta 4

Concretização 1:

Gerador de Questão



Na figura estão representados dois pontos B e C de uma dada circunferência, o ângulo ABC e a corda $[BD]$ contida na reta AB.

Sabe-se que $A\hat{B}C = 139^\circ$.

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.

Nota. A figura não está desenhada à escala.

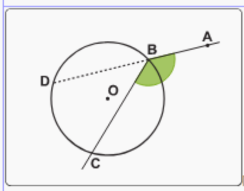
Gerador de Resposta

$\overset{\frown}{CD} = 139^\circ$.	☐
ABC é um ângulo de segmento.	☐
$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BC}}{2}$.	☑
Se $A\hat{B}C = 139^\circ$ e $\overset{\frown}{BD} = 100^\circ$ então $\overset{\frown}{BC} = 153^\circ$.	☐

Figura A.35: Concretização 1

Concretização 2:

Gerador de Questão



Na figura estão representados dois pontos B e C de uma dada circunferência, o ângulo ABC e a corda $[BD]$ contida na reta AB.

Sabe-se que $A\hat{B}C = 133^\circ$.

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.

Nota. A figura não está desenhada à escala.

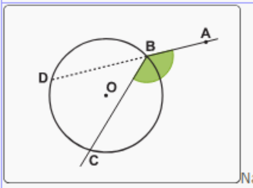
Gerador de Resposta

$C\hat{B}D = 90^\circ$.	☐
CBD é um ângulo de segmento.	☐
$A\hat{B}C = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BC}$.	☐
Se $A\hat{B}C = 133^\circ$ e $\overset{\frown}{BD} = 75^\circ$ então $\overset{\frown}{BC} = 121^\circ$.	☐

Figura A.36: Concretização 2

Concretização 3:

Gerador de Questão



Na figura estão representados dois pontos B e C de uma dada circunferência, o ângulo ABC e a corda $[BD]$ contida na reta AB.

Sabe-se que $A\hat{B}C = 122^\circ$.

Indica se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes.

Nota. A figura não está desenhada à escala.

Gerador de Resposta

$C\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$.	✓
CBD é um ângulo inscrito.	✓
$A\hat{B}C = \frac{360^\circ - \overset{\frown}{CD}}{2}$.	✓
Se $A\hat{B}C = 122^\circ$ e $\overset{\frown}{BD} = 75^\circ$ então $\overset{\frown}{BC} = 169^\circ$.	✓

Figura A.37: Concretização 3